

# Apuntes de la práctica de QFT

28 de agosto de 2018



**Sobre estos apuntes** Estos apuntes/resueltos que usted está viendo fueron creados por un alumno mientras cursaba la materia. Es por ello que podrían haber errores de tipeo, errores conceptuales, de interpretación en los resultados, etc. Use estos apuntes con precaución. Estos apuntes no son oficiales de ninguna cátedra. En caso de notar algún efecto adverso suspenda inmediatamente su uso y consulte con su profesor de cabecera.

- El alumno cursó la materia durante el primer cuatrimestre de 2018, [este link](#) conduce a la página de la materia.
- Encontrá más resueltos de Alf en [este link](#).

## Box 1 - ¿Cómo se hacen estos apuntes?

Estos apuntes están hechos usando un programa llamado [Lyx](#)<sup>a</sup>. Para hacer los dibujos se usó [Inkscape](#) y después se insertó las imágenes en formato [svg](#)<sup>b</sup> directamente en Lyx sin conversión alguna.

En [este repositorio de GitHub](#) se encuentra la plantilla (*template*) que Alf usa actualmente, con todo lo necesario para compilarla y empezar a divertirse.

<sup>a</sup>Lyx es una interfaz gráfica para Latex que hace que la escritura se vuelva extremadamente fluida y veloz (al punto de poderse tomar apuntes en vivo durante una clase).

<sup>b</sup>svg es el formato nativo de Inkscape.

**Sobre la notación** Intentaré mantener una notación lo más consistente posible y que permita diferenciar de forma clara los distintos “objetos matemáticos” que se usan en esta materia sin ambigüedad alguna. La notación que intentaré usar siempre (aunque a veces es complicado así que no garantizo nada) es:

Notación	Descripción
$\langle \psi  ,  \psi \rangle, \langle \psi   \phi \rangle$	Bras, kets y brakets (estándar).
$\overline{A}$	Operador $A$ (operador que actúa sobre los elementos del espacio de Hilbert $ \psi\rangle \in \mathcal{H}$ ).
$\mathbf{A}$	Vector 3D (no operador).
$\overline{\mathbf{A}}$	Operador vectorial 3D.
$\hat{x}$	Versor 3D (vector de módulo 1, no operador).
$\overline{\sigma_x}, \overline{\sigma_y}, \overline{\sigma_z}$	Matrices de Pauli vistas como operadores sobre los elementos del espacio de Hilbert.
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Matrices de Pauli vistas como matrices (valga la redundancia).
1	Número 1.
$\mathbb{1}$	Matriz identidad.

---

$\bar{1} \equiv \underline{1}$	Operador identidad del espacio de Hilbert.
$\cancel{A} \equiv A^\mu \gamma_\mu$	Feynman slash notation.
$e^{ikx} \equiv e^{ik^\mu k_\mu}$	Contracción de dos cuatrivectores en el exponente.
$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \neq e^{ikx}$	Producto escalar de las componentes espaciales $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}$ .
$k$	Cuadrivector $k = [k^0 \quad k^1 \quad k^2 \quad k^3]$ .
$\mathbf{k}$	Componentes espaciales del cuadrivector $k$ , $\mathbf{k} = [k^1 \quad k^2 \quad k^3]$ .
$\partial_{\underset{x}{\mu}} \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \partial_{\underset{y}{\mu}} \equiv \frac{\partial}{\partial y^\mu}$	Cuando sea necesario diferenciar en qué frame se evalúa al operador $\partial$ , lo indicaré así.

## Índice

<b>1. Grupo de rotaciones en D dimensiones</b>	<b>6</b>
1.1. El grupo de rotaciones . . . . .	6
1.2. Rotaciones + trasalaciones . . . . .	8
1.3. Relatividad especial . . . . .	8
<b>2. Repaso de teórica 1 (tensores)</b>	<b>9</b>
2.1. Vector contravariante . . . . .	9
2.2. Tensor contravariante de rango 2 . . . . .	10
2.3. Vector covariante . . . . .	10
2.4. Álgebra de tensores . . . . .	11
2.5. Espinores . . . . .	11
<b>3. Ecuación de Dirac</b>	<b>12</b>
<b>4. Guía 2 - Formulación lagrangiana</b>	<b>19</b>
<b>5. Guía 3</b>	<b>23</b>
5.1. Introducción . . . . .	23
5.1.1. Repaso de oscilador armónico cuántico . . . . .	23
5.1.2. Klein-Gordon . . . . .	24
5.2. Cosas . . . . .	25
5.3. Algo de función de dos puntos . . . . .	27
<b>6. Guía 4 - Cuantización del campo de Dirac</b>	<b>30</b>
6.1. Campo clásico de Dirac . . . . .	30
6.2. Cuantización . . . . .	31
6.3. Corriente de Noether de Dirac . . . . .	32
<b>7. Guía 4B - Proca y Maxwell</b>	<b>34</b>
7.1. Campo de Proca . . . . .	35
<b>8. Cuantización canónica del campo de Maxwell</b>	<b>36</b>
8.1. Gupta -Bleuler . . . . .	37
<b>9. Interacciones</b>	<b>38</b>
9.1. Scattering . . . . .	38
9.1.1. Ejemplo $\lambda\phi^3$ . . . . .	39
<b>10. Feynman rules and scattering processes</b>	<b>42</b>
10.1. Reglas de Feynman en QED . . . . .	43
<b>11. Sección eficaz</b>	<b>45</b>

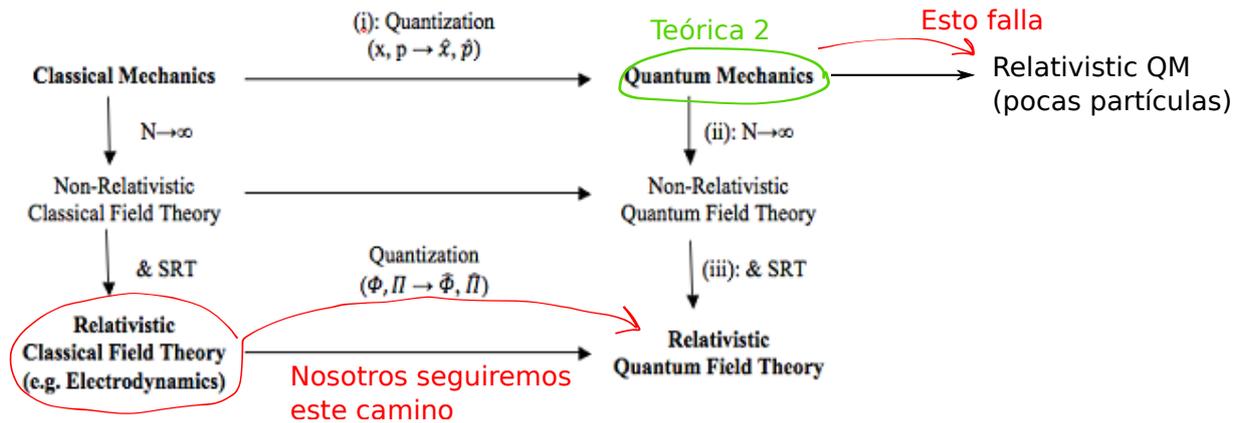
## Índice de *boxes*

1.	<b>Box 1 - ¿Cómo se hacen estos apuntes?</b>	1
2.	<b>Box 2 - Ejemplos en dos dimensiones</b>	6
3.	<b>Box 3 - Ejemplos de matrices de rotación</b>	7
4.	<b>Box 4 - Ejemplo</b>	8
5.	<b>Box 5 - Vector (tensor de rango uno cero)</b>	10
6.	<b>Box 6 - Las matrices son inversas!</b>	10
7.	<b>Box 7 - Sobre la delta de Kroneker</b>	11
8.	<b>Box 8 - Fuerzas y gradientes en Newton</b>	11
9.	<b>Box 9 - Sobre representaciones</b>	12
10.	<b>Box 10 - Dirac y Klein-Gordon</b>	13
11.	<b>Box 11 - Convención sobre <math>k^0</math></b>	13
12.	<b>Box 12 - Álgebra de Clifford</b>	15
13.	<b>Box 13 - Grupo de Lorentz</b>	17
14.	<b>Box 14 - Repaso de <math>SU(D)</math></b>	18
15.	<b>Box 15 - Sobre la derivada parcial del lagrangiano</b>	19
16.	<b>Box 16 - Simetrías variacionales y simetrías de la ecuación de movimiento</b>	21
17.	<b>Box 17 - Orden normal</b>	25
18.	<b>Box 18 - Letras...</b>	28
19.	<b>Box 19 - Motivación para los propagadores</b>	28
20.	<b>Box 20 - Tipo de dato <math>\cdot^{\text{es}}</math> spinor de Dirac cuantizadoz la operación <math>\dagger</math></b>	31
21.	<b>Box 21 - ¿Sabías que...</b>	37

## Índice alfabético

Guía 1 problema 14, 18  
Guía 1 problema 18, 16  
Guía 1 problema 6, 12  
Guía 3 problema 15, 28  
Guía 4 problema 7, 33  
Guía 4 problema 8, 33  
Guía 5A problema 11, 48

A modo de mapa conceptual de qué es lo que existe y qué es lo que haremos, podemos armar el siguiente cuadro:



## 1. Grupo de rotaciones en D dimensiones

Surge a partir de transformaciones lineales que preservan las formas cuadráticas. Consideremos la forma cuadrática

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \sum_{i=1}^D (x^i)^2 \rightarrow \text{Forma cuadrática}$$

siendo  $\mathbf{x}$  una  $D$ -upla. Buscamos una transformación caracterizada por la matriz  $M$  tal que

$$\mathbf{x}' = M \cdot \mathbf{x} \rightarrow \text{Transformación}$$

y si la transformación preserva la forma cuadrática entonces

$$\begin{aligned} (x')^T x' &= x^T x \rightarrow \text{Se preserva} \\ (Mx)^T Mx &= \\ x^T M^T Mx &= \end{aligned}$$

por lo tanto la matriz  $M$  debe satisfacer

$$M^T M = 1 \rightarrow \text{Define a las matrices del grupo } \mathbf{O}(D)$$

y esto nos define al grupo ortogonal

$$\mathbf{O}(D) \rightarrow \text{Grupo ortogonal}$$

### Box 2 - Ejemplos en dos dimensiones

Las matrices  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  y  $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  pertenecen al grupo ortogonal pues  $M^T M = 1$ .

**Determinante de las matrices de  $\mathbf{O}(D)$**  Debido a que las matrices de  $\mathbf{O}(D)$  satisfacen  $M^T M = 1$  entonces

$$\begin{aligned} \det(M^T M) &= \det(1) \\ \det(M^T) \det(M) &= 1 \\ (\det(M))^2 &= \end{aligned}$$

en consecuencia

$$\det(M) = \pm 1$$

### 1.1. El grupo de rotaciones

Utilizando este hecho vamos a definir al grupo de rotaciones

$$\mathbf{SO}(D) = \text{el subgrupo de } \mathbf{O}(D) \text{ con } \det(M) = 1$$

Todas las matrices de  $\mathbf{SO}(D)$  se pueden obtener como una transformación continua saliendo desde la identidad, por ejemplo  $\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$  es la matriz de rotación en ángulo  $\theta$  en  $D = 2$  y es una parametrización continua de la identidad.

**Número de parámetros** La cantidad de parámetros reales  $\mathbb{R}$  que se requieren para etiquetar a una matriz genérica de  $\mathbf{SO}(D)$  son

$$\frac{D(D-1)}{2} \rightarrow \text{Cantidad de parámetros necesarios en } \mathbf{SO}(D)$$

La cantidad de parámetros requeridos es justamente la cantidad de planos alrededor de los que podemos rotar: por ejemplo en  $D = 3$  tenemos que podemos rotar en  $xy$ , en  $yz$  y en  $zx$  (los tres ángulos de Euler) por lo tanto requerimos tres parámetros.

**Relación con exponencial** Todas las matrices de  $\mathbf{SO}(D)$  satisfacen que se pueden escribir como la exponencial de alguien, es decir

$$M \in \mathbf{SO}(D) \quad \Rightarrow \quad M = e^\Sigma$$

siendo  $\Sigma$  otra matriz. Entonces tenemos que

$$M^T M = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (e^\Sigma)^{-1} = (e^\Sigma)^T \quad \Leftrightarrow \quad e^{-\Sigma} = e^{\Sigma^T} \quad \Leftrightarrow \quad -\Sigma = \Sigma^T$$

donde en el paso  $(e^\Sigma)^{-1} = (e^\Sigma)^T \rightarrow e^{-\Sigma} = e^{\Sigma^T}$  hay que usar la serie de  $e^\Sigma$  y es trivial. Esto es una forma fácil de construir matrices del grupo  $\mathbf{SO}(D)$  ya que cualquier matriz  $\Sigma$  antisimétrica nos da una matriz  $M \in \mathbf{SO}(D)$  haciendo  $e^\Sigma$ .

Otra propiedad importante es

$$\det(e^\Sigma) = e^{\text{tr}(\Sigma)}$$

**Box 3 - Ejemplos de matrices de rotación**

**Caso 2D** Consideremos la matriz  $\Sigma = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ . Esta matriz es análoga a la unidad imaginaria en los números complejos, ya que  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ . Entonces

$$e^{\omega \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}} = \dots \text{ usar expansión en serie } \dots = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cos \omega + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \sin \omega$$

es decir que

$$e^{\omega \Sigma} = \begin{bmatrix} \cos \omega & \sin \omega \\ -\sin \omega & \cos \omega \end{bmatrix}$$

que es la matriz de rotación en dos dimensiones!

**Caso 3D** Para parametrizar todas las matrices de rotación en tres dimensiones simplemente buscamos una base para las matrices antisimétricas de  $3 \times 3$ , es decir

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \rightarrow \text{Base de matrices antisimétricas}$$

y de esta forma cualquier matriz  $M \in \mathbf{SO}(3)$  se puede parametrizar como

$$M = e^{\omega_{12}\Sigma_{12} + \omega_{23}\Sigma_{23} + \omega_{31}\Sigma_{31}}$$

donde  $\Sigma_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\Sigma_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$  y  $\Sigma_{31} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

Por una cuestión de notación se definen las nuevas matrices

$$\text{Nuevas matrices} \rightarrow \begin{cases} \Sigma_{21} \stackrel{\text{def}}{=} -\Sigma_{12} \\ \Sigma_{13} \stackrel{\text{def}}{=} -\Sigma_{13} \\ \Sigma_{23} \stackrel{\text{def}}{=} -\Sigma_{32} \end{cases}$$

y los nuevos parámetros

$$\text{Nuevos parámetros} \rightarrow \omega_{ij} = -\omega_{ji}$$

(es decir que duplicamos la base con elementos linealmente dependientes para hacer una notación más compacta) y entonces

$$M = e^{\frac{1}{2}\omega_{ij}\Sigma_{ij}} \rightarrow \text{Sólo es notación}$$

**Álgebra de Lie** Las matrices antisimétricas forman un álgebra respecto al conmutador. Las álgebras respecto a un conmutador se conocen como álgebras de Lie. Esto es porque  $[A, B]^T = -[A, B]$ , es decir que  $[A, B]$  es antisimétrico cuando  $A$  y  $B$  son antisimétricos.

## 1.2. Rotaciones + traslaciones

Obsérvese que

$$x' = Mx + C \rightarrow \text{Transformación euclídea}$$

donde  $C$  es cualquier traslación funciona igual que lo anterior en términos de las relaciones entre dos puntos, es decir que

$$(x - y)^T (x - y) = (x' - y')^T (x' - y')$$

## 1.3. Relatividad especial

Para llevar todo a la relatividad especial vamos a buscar que las simetrías sean aquellas que dejan invariante al invariante relativista

$$x^T \eta x \rightarrow \text{Invariante relativista}$$

donde  $\eta = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix}$  es la métrica de Minkowsky. Es decir que ahora vamos a buscar transformaciones lineales

$$x' = \Lambda x \rightarrow \text{Transformación}$$

tal que

$$(x')^T \eta x' = x^T \eta x \rightarrow \text{Así pedimos que sea invariante}$$

de donde sale que

$$\boxed{\Lambda^T \eta \Lambda = \eta} \rightarrow \text{Condición para que mantenga invariancia}$$

y esto nos define al grupo de Lorentz

$$\mathbf{O}(1, 3) \rightarrow \text{Grupo de Lorentz}$$

Se nota  $\mathbf{O}(1, 3)$  porque la métrica  $\eta = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix}$  tiene un signo de un tipo y tres del otro.

Debido a que  $\eta = \eta^{-1}$  entonces otra forma de escribir lo anterior es

$$\Lambda^T = \eta \Lambda^{-1} \eta \quad \equiv \quad \Lambda^T \eta \Lambda = \eta$$

**Sobre el determinante** Obsérvese que todas las matrices del grupo de Lorentz tienen determinante  $\pm 1$ :

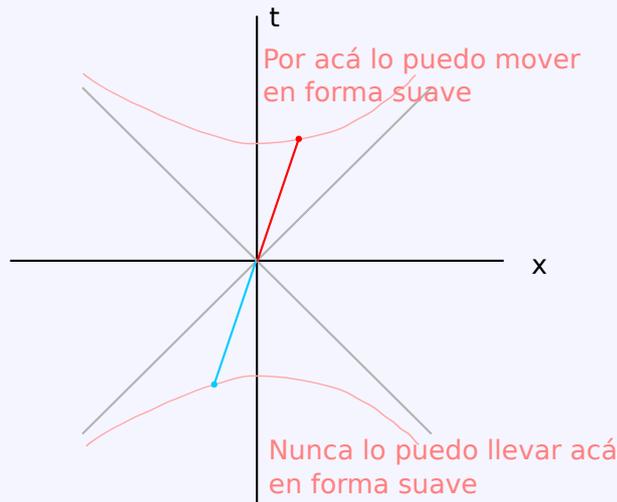
$$\det(\Lambda^T) = \det(\eta) \det(\Lambda^{-1}) \underbrace{\det(\eta)}_{-1} \Rightarrow \boxed{\det \Lambda = \pm 1}$$

El grupo formado por las matrices con determinante  $+1$  se denomina el grupo

$$\mathbf{SO}(1, 3) \rightarrow \text{Subgrupo de } \mathbf{O}(1, 3) \text{ cuando el determinante es } 1$$

### Box 4 - Ejemplo

Consideremos el grupo  $\mathbf{SO}(1, 1)$ , es decir una coordenada temporal y una espacial. La matriz  $\Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  pertenece al grupo  $\mathbf{SO}(1, 1)$ . Pero no está conectada continuamente con la identidad pues la transformación que aplicaría es convertir el vctorsito rojo en el celestito:



pero esto no está conectado en forma continua con la identidad!  
Entonces del grupo  $\mathbf{SO}(1,3)$  sólo nos va a interesar un único subgrupo, o algo así.

## 2. Repaso de teórica 1 (tensores)

Vamos a ver un repaso de cosas que “ya vimos” en Teórica 1, como vectores covariantes y contravariantes.

Hay una ambigüedad con el término vector por el hecho de que muchos objetos, como los espinores, forman un espacio vectorial. Sin embargo hablamos de *vector* como un tensor “de una dimensión”.

### 2.1. Vector contravariante

Comencemos con un caso particular de un vector contravariante. Los vectores “físicos” surgen de la caracterización de una curva en algún espacio, sea  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{R}^4$ , etc. Consideremos una curva. La curva tiene una existencia más allá del sistema de coordenadas que usamos. Dada la curva

$$x^\mu(\lambda) \rightarrow \text{Curva}$$

siendo  $\lambda$  un parámetro. Podemos calcular

$$\frac{dx^\mu(\lambda)}{d\lambda}$$

Si cambiamos de sistema de coordenada estos cuatro números van a ser distintas, pero si la transformación se hace en forma apropiada van a representar al mismo objeto.

Supongamos entonces que tenemos dos sistemas de coordenadas

$$\text{Dos sistemas de coordenadas} \rightarrow \begin{cases} x^\mu \\ y^\mu \end{cases}$$

Entonces tenemos que

$$\frac{dy^\mu}{d\lambda} = \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu} \frac{dx^\nu}{d\lambda}$$

y entonces vamos a definir a la matriz

$$H^\mu{}_\nu \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \frac{\partial y^1}{\partial x^2} & \dots \\ \frac{\partial y^2}{\partial x^1} & \frac{\partial y^2}{\partial x^2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Si asumimos que el cambio de coordenadas es “bueno” entonces es inversible, con lo cual existe la matriz inversa

$$H \text{ es tal que } \exists H^{-1}$$

Las matrices invertibles de  $D \times D$  forman un grupo llamado

$$\mathbf{GL}(D, \mathbb{R}) \rightarrow \text{Grupo general lineal}$$

**Box 5 - Vector (tensor de rango uno cero)**

Un vector está definido por

$$\frac{dy^\mu}{d\lambda} = \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \rightarrow \text{Define un vector}$$

Las tiras de números  $\frac{dy^\mu}{d\lambda}$  y  $\frac{dx^\nu}{d\lambda}$  representan a un objeto que es un vector y cuya existencia va más allá de los números que lo representan. Introduciendo la notación  $H^\mu{}_\nu = \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu}$  entonces

$$v'^\mu = H^\mu{}_\nu v^\nu$$

**2.2. Tensor contravariante de rango 2**

Teniendo definidos dos vectores nos podemos definir un tensor de la siguiente forma

$$\text{Tensor} \rightarrow W^{\mu\nu} = U^\mu V^\nu \leftarrow \text{Vectores}$$

Para ver cómo se transforma un tensor de estos aplicamos la definición de los vectores:

$$\begin{aligned} W'^{\mu\nu} &= U'^\mu V'^\nu \\ &= H^\mu{}_\rho H^\nu{}_\sigma W^{\rho\sigma} \end{aligned}$$

Se dice que este tipo de tenores son de rango  $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Obsérvese que la matriz

$$H^\mu{}_\rho H^\nu{}_\sigma \in \mathbb{R}^{D \times D \times D \times D}$$

El hecho de que es una matriz que representa una transformación de coordenadas hace que sea invertible, con lo cual forman su propio grupo (o algo así). Sin embargo, el hecho de que sea el producto de dos matrices que viven en  $\mathbf{GL}(D, \mathbb{R})$  hace que las matrices  $H^\mu{}_\rho H^\nu{}_\sigma$  sean simplemente otra representación de  $\mathbf{GL}(D, \mathbb{R})$ .

**2.3. Vector covariante**

El vector covariante está relacionado con el gradiente. Consideremos la función  $\varphi$  definida de  $\mathbb{R}^D$  en  $\mathbb{R}$ . Su gradiente será

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} \rightarrow \text{Gradiente}$$

Si lo queremos transformar con la misma matriz de transformación encontraremos que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\nu}$$

y acá vemos que la matriz es la inversa de la otra

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = (H^{-1})^T \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

**Box 6 - Las matrices son inversas!**

Para ver que ambas matrices son inversas simplemente las multiplicamos y vemos qué nos dan

$$\begin{aligned} \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial y^\nu} &= \frac{\partial y^\mu}{\partial y^\nu} \leftarrow \text{Por regla de la cadena} \\ &= \delta^\mu{}_\nu \end{aligned}$$

que es la identidad.

## Box 7 - Sobre la delta de Kroneker

Esto es porque  $\delta^\mu{}_\nu$  es un tensor de rango  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Sin embargo tiene la peculiar propiedad de que sus coordenadas son invariantes, es decir que

$$\begin{aligned} \delta'^\mu{}_\nu &= \frac{\partial x^\sigma}{\partial y^\nu} \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\rho} \delta^\rho{}_\sigma \\ &= \frac{\partial x^\sigma}{\partial y^\nu} \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\sigma} \\ \text{Chain rule} \rightarrow &= \frac{\partial y^\mu}{\partial y^\nu} \\ &= \delta^\mu{}_\nu \end{aligned}$$

Entonces  $\delta_{\mu\nu}$  está mal escrito.

## Box 8 - Fuerzas y gradientes en Newton

Dado que el gradiente de algo y un vector común son objetos que se transforman de maneras distintas, ¿cómo puede ser que en Física 1 nunca tuvimos estos problemas al realizar transformaciones?. El asunto es que en F1 siempre transformamos con rotaciones y desplazamientos. Y resulta que el grupo de rotaciones  $\mathbf{SO}(D)$  (que es un subgrupo de  $\mathbf{GL}(D, \mathbb{R})$ ) contiene a las matrices tales que  $H^{-1} = H^T$  con lo cual un gradiente es igual a un vector frente al grupo  $\mathbf{SO}(D)$ .

Esto no será cierto en las transformaciones de Lorentz.

Como se mostró en el box 7 la delta de Kronecker es invariante. En el grupo  $\mathbf{GL}(D, \mathbb{R})$  parece que es el único invariante. Sin embargo frente a una transformación de Lorentz, es decir frente al Grupo de Lorentz, existe otro tensor invariante que es la métrica de Minkowsky

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Es invariante}$$

Esto se obtiene a partir de la definición del grupo de Lorentz. Podemos verlo de la siguiente forma

$$\eta'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\sigma}{\partial y^\mu} \frac{\partial x^\rho}{\partial y^\nu} \eta_{\sigma\rho}$$

Ahora imponemos que la transformación es del grupo de Lorentz, es decir que la matriz  $H \in \mathcal{L}[1][3]$ . Se termina llegando a que

$$\eta'_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$$

## 2.4. Álgebra de tensores

Si volvemos al grupo  $\mathbf{GL}(D, \mathbb{R})$ , podemos definir la operación “contracción de índices”

$$W^{\mu\nu} L_{\nu\rho}$$

y se puede mostrar lo anterior se transforma como un nuevo tensor. Es decir que hicimos

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ (operación de contracción) } \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

También podemos subir y bajar índices según

$$x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu$$

## 2.5. Espinores

Un espinor es la raíz cuadrada de un tensor. Es un objeto que cuando se lo multiplica en forma tensorial por sí mismo se obtiene un vector. Los espinores se transforman de la forma

$$\psi' = S(\Lambda) \psi$$

donde  $S(\Lambda)$  es una representación del grupo de Lorentz.

## Box 9 - Sobre representaciones

Dado un determinado grupo, una representación de un grupo es un mapa  $\rho$  entre este grupo y “otra cosa” tal que

$$\begin{cases} \rho(1) = 1 \\ \rho(g_1 g_2) = \rho(g_1) \rho(g_2) \end{cases}$$

## Guía 1, ejercicio 6

$$x^\rho \eta_{\rho\sigma} x^\sigma = y^\mu \eta_{\mu\nu} y^\nu$$

No llegué a copiar pues llegué tarde.

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu + \mathcal{O}(\omega^2) \rightarrow \text{Transf. de Lorentz}$$

$$\eta_{\rho\sigma} \Lambda^\mu{}_\rho \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\sigma \rightarrow \text{Condición para } \Lambda$$

$$\eta_{\rho\sigma} = (\delta^\mu{}_\rho - \omega^\mu{}_\rho) \eta_{\mu\nu} (\delta^\nu{}_\sigma + \omega^\nu{}_\sigma)$$

$$\eta^{\rho\sigma} = \eta^{\rho\sigma} + \eta_{\rho\nu} \omega^\nu{}_\sigma + \eta_{\mu\sigma} \omega^\mu{}_\rho + \mathcal{O}(\omega^2)$$

## 3. Ecuación de Dirac

Vamos a resolver en forma general la ecuación de Dirac en forma general y luego ver que obtenemos lo mismo si la resolvemos en reposo y luego aplicamos un boost.

La ecuación de Dirac es

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0 \rightarrow \text{Dirac}$$

donde las matrices  $\gamma^\mu$  satisfacen

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$$

La dimensión mínima para las  $\gamma^\mu$  es  $4 \times 4$  y la representación de Dirac es

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix} \quad \gamma^i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma^i \text{ las matrices de Pauli} \quad \begin{cases} \sigma^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \sigma^2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \\ \sigma^3 = \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Por otro lado el espinor  $\psi$  es un objeto de cuatro componentes

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix}$$

Desarrollando en forma explícita la ecuación de Dirac vemos que la primera coordenada está dada por

$$\text{Eq. de Dirac} \rightarrow \begin{cases} i(\partial_0 \psi_1 + \partial_1 \psi_4 - i\partial_2 \psi_4 + \partial_3 \psi_3) - m\psi_1 = 0 & \leftarrow \text{Eq. 1} \\ \text{eq. 2} \\ \text{eq. 3} \\ \text{eq. 4} \end{cases}$$

## Box 10 - Dirac y Klein-Gordon

Si  $\psi$  cumple la ecuación de Dirac entonces también cumple la ecuación de Klein-Gordon (componente a componente). Es decir

$$(\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu + m^2) \psi = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} (\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu + m) \psi_1 = 0 \\ (\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu + m) \psi_2 = 0 \\ (\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu + m) \psi_3 = 0 \\ (\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu + m) \psi_4 = 0 \end{cases}$$

Como sabemos que  $\psi$  satisface Klein-Gordon entonces sabemos cómo escribirlas. Es decir, sabemos que admite soluciones de onda plana de la forma

$$e^{-ik^\mu x_\mu}$$

con

$$k^\mu k_\mu = m^2 \rightarrow \text{Sale de Klein-Gordon}$$

La relación anterior  $k^2 = m^2$  nos fija una componente en términos de las demás, en general se despeja la componente temporal

$$(k^0)^2 = m^2 + (\mathbf{k})^2$$

y de aquí obtenemos que

$$k^0 = \pm \sqrt{m^2 + |\mathbf{k}|^2}$$

Box 11 - Convención sobre  $k^0$ 

Se suele usar el  $k^0 > 0$  y luego se conjuga para obtener las demás soluciones. Es decir  $e^{-ik^\mu x_\mu}$  y  $e^{ik^\mu x_\mu}$  siempre con  $k^0 > 0$ .

Entonces tenemos que las soluciones con frecuencia positiva son

$$e^{-ik^\mu x_\mu} \rightarrow \text{Frecuencia positiva}$$

Ahora vamos a proponer como solución de Dirac

$$\begin{aligned} \psi(x) &= e^{-ik \cdot x} \psi_0 \\ &= e^{-ik \cdot x} \begin{bmatrix} \varphi \\ \chi \end{bmatrix} \rightarrow \text{Proponemos para Dirac} \end{aligned}$$

donde  $\varphi$  y  $\chi$  son elementos de dos componentes cada uno. La notación

$$k \cdot x \equiv k^\mu x_\mu \rightarrow \text{Notación!}$$

Veamos entonces cómo actúa el operador:

$$\begin{aligned} i\gamma^\mu \partial_\mu \psi &= i\gamma^\mu \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) (e^{-ik^\mu x_\mu} \psi_0) \\ &= i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} e^{-ik_\nu x^\nu} \psi_0 \\ &= i\gamma^\mu k_\mu e^{-ik_\nu x^\nu} \psi_0 \\ &= i\gamma^\mu k_\mu \psi \end{aligned}$$

Entonces la ecuación de Dirac se transformó en

$$(\partial^\mu k_\mu - m) \psi = 0 \rightarrow \text{Dirac cuando } \psi = e^{-ik \cdot x} \psi_0$$

Esta ecuación se puede descomponer en los dos bloques de dos componentes cada una

$$\begin{cases} k_0 \varphi - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k} \chi - m \varphi = 0 \\ -k_0 \chi + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k} \varphi - m \chi = 0 \end{cases}$$

De aquí lo que podemos hacer es despejar una componente en términos de la otra y despejar  $\chi(\varphi)$ . La segunda ecuación se puede reescribir como

$$\chi = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k} \varphi}{k_0 + m}$$

Ahora introducimos esto en la primera ecuación y obtenemos

$$\left[ (k_0 - m) - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}}{k_0 + m} \right] \varphi = 0$$

Ahora veamos lo siguiente

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k} &= \sigma^i k^i \sigma^j k^j \\ &\xrightarrow{\text{Hacer la cuenta y ver que da}} \frac{[\sigma^i, \sigma^j] + \overbrace{\{\sigma^i, \sigma^j\}}^{\delta_{ij}}}{2} k^i k^j \\ &\xrightarrow{\text{Props. de matrices de Pauli}} \delta_{ij} k^i k^j \\ &= |\mathbf{k}|^2 \end{aligned}$$

Por ser antisimétrico contraído con simétrico

Entonces

$$\left[ (k_0 - m) - \frac{|\mathbf{k}|^2}{k_0 + m} \right] \varphi = 0$$

Ahora pedimos que el corchete sea nulo para que  $\varphi$  pueda ser  $\neq 0$  y entonces encontramos que

$$\psi^{(+)} = e^{ikx} \begin{bmatrix} \varphi \\ \frac{\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{k_0 + m} \varphi \end{bmatrix}$$

Sabemos que en el sistema en reposo de la partícula

$$k^\mu = (m, 0, 0, 0) \rightarrow \text{Sistema en reposo}$$

por lo tanto

$$|\mathbf{k}|^2 = m^2$$

y ahora no entendí bien pero queda

$$\psi^{(0)} = e^{-imt} \begin{bmatrix} \varphi \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Solución en reposo}$$

Si queremos las soluciones con energía negativa lo que tenemos es que las ecuaciones se modifican

$$\text{Para energía negativa} \rightarrow \begin{cases} -k_0 \varphi + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k} \chi - m \varphi = 0 \\ k_0 \chi - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k} \varphi - m \chi = 0 \end{cases}$$

Acá lo que hacemos es despejar  $\varphi(\chi)$  que nos queda igual:

$$\varphi = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}}{k_0 + m} \chi$$

y sigue todo igual.

Entonces hemos encontrado las dos soluciones

$$\begin{cases} \psi^{(+)} = e^{ikx} \begin{bmatrix} \varphi \\ \frac{\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{k_0 + m} \varphi \end{bmatrix} \rightarrow \text{Partícula} \\ \psi^{(-)} = e^{ik \cdot x} \begin{bmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}}{k_0 + m} \chi \\ \chi \end{bmatrix} \rightarrow \text{Antipartícula} \end{cases}$$

Veamos ahora qué ocurre si boosteamos la solución en reposo. Para ello usaremos la matriz  $S(\Lambda)$  que nos dice cómo transformar espinores.

**Cómo boostear** Si  $\psi$  es solución de Dirac entonces

$$\tilde{\psi}(x) = S(\Lambda) \psi(\Lambda^{-1}x)$$

también es solución.

Para hallar el  $S(\Lambda)$  recordemos que

$$S(\Lambda) = e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}}$$

donde las

$$\Sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

son los generadores del grupo de Lorentz. Si queremos un boost en  $z$  entonces pedimos que

$$\omega_{03} = -\omega_{30} \neq 0 \rightarrow \text{Para boost en } z$$

Para no escribir de más hacemos  $\omega_{03} \equiv \alpha$ . Entonces la matriz es

$$\begin{aligned} \Sigma^{03} &= \frac{i}{4} [\gamma^0, \gamma^3] \\ &= \frac{i}{4} (\gamma^0\gamma^3 - \gamma^3\gamma^0) \\ \gamma^\mu \text{ satisfacen Clifford} \rightarrow &= \frac{i}{2}\gamma^0\gamma^3 \end{aligned}$$

### Box 12 - Álgebra de Clifford

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$$

y entonces

$$e^{-i\frac{\alpha}{2}\gamma^0\gamma^3} = e^{\frac{\alpha}{2}\gamma^0\gamma^3}$$

Para ver cuánto da esta cuenta consideremos el hecho de que

$$\begin{cases} (\gamma^0\gamma^3)^{\# \text{ par}} = 1 \\ (\gamma^0\gamma^3)^{\# \text{ impar}} = \gamma^0\gamma^3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (\gamma^0\gamma^3)^\dagger &= (\gamma^3)^\dagger \gamma^{0\dagger} \\ &= -\gamma^3\gamma^0 \end{aligned}$$

entonces

$$e^{\frac{\alpha}{2}\gamma^0\gamma^3} = \cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \gamma^0\gamma^3 \sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Ahora vamos a aplicarle el boost a la solución en reposo  $\psi^{(0)} = e^{-imt} \begin{bmatrix} \varphi \\ 0 \end{bmatrix}$ . Entonces

$$\begin{aligned} \psi^{(\text{boostado})} &= (\text{una fase}) \overbrace{\left( \cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \gamma^0\gamma^3 \sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right)}^{S(\Lambda)} \begin{bmatrix} \varphi \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= (\text{una fase}) \begin{bmatrix} \cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right) \varphi \\ \sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sigma^3 \varphi \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Para encontrar cómo se modifica la fase usamos  $\tilde{\psi}(x) = S(\Lambda) \psi(\Lambda^{-1}x)$ , es decir que tenemos que aplicar  $\Lambda^{-1}x$ . Para ver cómo meter ese  $\Lambda^{-1}$  consideramos el hecho de que

$$y^T \eta \Lambda x = (\Lambda^{-1}y)^T \eta x \rightarrow \text{vale siempre}$$

No entendí.

$$(\text{una fase}) = e^{-ik^\mu_{\text{boostado}} x_\mu}$$

donde  $k_{\text{boostado}}$  es el que es sin boostear multiplicado por la  $\Lambda$ .

$$\Lambda(\omega_{03} \equiv \alpha) = \begin{bmatrix} \cosh \alpha & \sinh \alpha \\ \sinh \alpha & \cosh \alpha \end{bmatrix}$$

Usando esta matriz encontramos

$$\begin{cases} k_0 = m \cosh \alpha \\ k_3 = m \sinh \alpha \end{cases}$$

Ahora queremos ver que el  $\psi^{(\text{boostado})} = \psi^{(+)} = e^{ikx} \begin{bmatrix} \varphi \\ \frac{k \cdot \sigma}{k_0 + m} \varphi \end{bmatrix}$ . Es decir que queremos ver que

$$\frac{\cancel{\sigma^3} \sinh \frac{\alpha}{2}}{\cosh \frac{\alpha}{2}} = \frac{k^3 \cancel{\sigma^3}}{k_0 + m}$$

Haciendo las cuentas se verifica que es.

## Guía 1, ejercicio 18

### Ítem a

Sabemos que  $\psi$  es solución de la ecuación de Dirac

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - \psi = 0$$

Queremos ver que

$$\text{Conjugación de carga en representación quirral} \rightarrow \psi^C = C\psi^* \quad C^{-1}\gamma^\mu C = -(\gamma^\mu)^*$$

también es solución. Para verificarlo lo que hacemos es meter a  $\psi^C$  en la ecuación de Dirac:

$$\begin{aligned} i\gamma^\mu \partial_\mu (C\psi^*) - mC\psi^* &= 0 \\ C^{-1}(i\gamma^\mu \partial_\mu C\psi^* - mC\psi^*) &= \leftarrow \text{Multiplicamos por } C^{-1} \\ iC^{-1}\gamma^\mu C \partial_\mu \psi^* - m\psi^* &= \\ i \underbrace{(C^{-1}\gamma^\mu C)^*}_{\gamma^\mu} \partial_\mu \psi - m\psi &= \leftarrow \text{Conjugamos todo} \end{aligned}$$

y listo.

### Ítem b

Recordemos que las matrices  $\gamma^\mu$  satisfacen el álgebra de Clifford

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \rightarrow \text{Clifford}$$

y existen muchas representaciones que funcionan. La representación de Dirac es

$$\text{Representación de Dirac} \rightarrow \begin{cases} \gamma^0 = \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix} \\ \gamma^i = \begin{bmatrix} & \sigma^i \\ -\sigma^i & \end{bmatrix} \end{cases}$$

y en la representación quirral o de Weyl son

$$\text{Representación quirral o de Weyl} \rightarrow \begin{cases} \gamma^0 = \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix} \\ \gamma^i = \begin{bmatrix} & \sigma^i \\ -\sigma^i & \end{bmatrix} \end{cases}$$

Recordemos de la vez pasada que habíamos encontrado que las soluciones de Dirac son

$$\text{Soluciones de Dirac} \rightarrow \begin{cases} \psi_1 = N_1 \begin{bmatrix} \chi \\ \frac{k^i \sigma^i}{k^0 + m} \chi \end{bmatrix} e^{-ik_\mu x^\mu} \rightarrow \text{Frecuencia positiva} \\ \psi_2 = N_2 \begin{bmatrix} \frac{k^i \sigma^i}{k^0 + m} \varphi \\ \varphi \end{bmatrix} e^{ik_\mu x^\mu} \rightarrow \text{Frecuencia negativa} \end{cases}$$

Ahora lo que vamos a hacer es “conjugar por carga” a estas soluciones

$$\begin{aligned}\psi_1^C &= i \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0 \end{bmatrix}}^{\gamma^2} N_1 \begin{bmatrix} \chi^* \\ \frac{k^i (\sigma^i)^*}{k^0 + m} \chi^* \end{bmatrix} e^{ik^\mu x_\mu} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\sigma^2 (\sigma^i)^* k^i}{k^0 + m} (-i) \chi^* \\ -i \sigma^2 \chi^* \end{bmatrix} e^{ik^\mu x_\mu} \\ \left. \begin{aligned} (\sigma^i)^* &= -\sigma^2 \sigma^i \sigma^2 \\ (\sigma^i)^2 &= 1 \end{aligned} \right\} \rightarrow = \begin{bmatrix} \frac{\sigma^i k^i}{k^0 + m} (-i \sigma^2 \chi) \\ -i \sigma^2 \chi \end{bmatrix} e^{ik^\mu x_\mu}\end{aligned}$$

### Box 13 - Grupo de Lorentz

Recordemos que el grupo de Lorentz está formado por todas las matrices  $\Lambda$  tales que

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$$

Lo anterior nos impone que  $\det \Lambda = \pm 1$  lo cual nos divide al grupo de Lorentz en dos hojas que son

$$\mathcal{L}_+ \quad \mathcal{L}_-$$

No sé cómo llegó a lo siguiente

$$\Lambda^\mu{}_\lambda \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\sigma = \eta_{\lambda\sigma}$$

$$(\Lambda^0_0)^2 - \left( (\Lambda^1_1)^2 + (\Lambda^2_2)^2 + (\Lambda^3_3)^2 \right) = 1$$

por lo tanto

$$(\Lambda^0_0)^2 \geq 1$$

En función del signo de  $\Lambda^0_0$  se vuelve a subdividir en dos nuevas hojas

$$\mathcal{L} \rightarrow \det \Lambda \rightarrow \begin{cases} \mathcal{L}_+ \rightarrow \text{sign} \Lambda^0_0 \rightarrow \begin{cases} \mathcal{L}_+^\uparrow & \rightarrow \text{Acá vive la identidad} \\ \mathcal{L}_+^\downarrow & \end{cases} \\ \mathcal{L}_- \rightarrow \text{sign} \Lambda^0_0 \rightarrow \begin{cases} \mathcal{L}_-^\uparrow & \rightarrow \text{Reflexiones espaciales} \\ \mathcal{L}_-^\downarrow & \rightarrow \text{Inversiones temporales} \end{cases} \end{cases}$$

(hay un buen resumen de todo esto en “Advanced Quantum Mechanics, Schwabl, sec. 6.1”.

$$\mathbf{O}(1,3) = \overbrace{\mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_+^\downarrow}^{\text{SO}(1,3)} \cup \mathcal{L}_-^\uparrow \cup \mathcal{L}_-^\downarrow$$

Obsérvese que como  $\mathcal{L}_+^\uparrow$  es el único que tiene a la identidad, entonces es el único que es un subgrupo. Los demás por sí solo son sólo conjuntos de matrices.

Generadores (es lo que antes llamamos  $\Sigma$ )

$$M^{\rho\sigma} \rightarrow \text{Generadores de Lorentz}$$

$$J_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} M^{jk} \rightarrow \text{Generadores de rotaciones}$$

$$k_i = M^{0i} \rightarrow \text{Generadores de boost}$$

Me limito a copiar fórmulas sin saber qué representan

$$\begin{cases} A_i = J_i + ik_i \\ B_i = J_i - ik_i \end{cases}$$

Aparentemente lo anterior son operadores, o matrices.

$$[A_i, B_j] = 0$$

$$[A_i, A_j] = i\varepsilon_{ijk} A_k \quad [B_i, B_j] = i\varepsilon_{ijk} B_k$$

“tenemos dos  $\text{SU}(2)$  que no se ven entre sí”. Entonces las representaciones van a ser sumas directas de dos de  $\text{SU}(2)$ .

Box 14 - Repaso de  $SU(D)$ 

Buscamos álgebra de Lie. Los generadores son las matrices de Pauli. No entiendo el repaso que está haciendo. Los autoestados son de la forma  $|j, m\rangle$  tales que

$$\underline{J}_z |j, m\rangle = m |j, m\rangle$$

Casimir  $\underline{J}^2$ .

$$\underline{J}^2 |j, m\rangle = j(j+1) |j, m\rangle$$

## Guía 1, ejercicio 14

Queremos ver cuál es el efecto de hacer un boost sobre un espinor cuando estamos usando la representación quirral. Cuando anoto una sarta de ecuaciones sin ningún comentario significa que no entiendo.

$$\psi'(x) = S(\Lambda) \psi(\Lambda^{-1}x)$$

con

$$S(\Lambda) = e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}}$$

con

$$\begin{aligned}\Sigma^{\mu\nu} &= \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \\ &= \frac{i}{4} (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu)\end{aligned}$$

$$\text{Para } \mu \neq \nu \Rightarrow \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = ? \rightarrow = \frac{i}{2} \gamma^\mu \gamma^\nu$$

$$\begin{aligned}k^i &= \Sigma^{0i} \\ &= \frac{i}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \sigma^1 \\ -\sigma^1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{i}{2} \begin{bmatrix} -\sigma^1 & 0 \\ 0 & \sigma^1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma^{ij} &= \frac{i}{2} \gamma^i \gamma^j \\ &= \frac{i}{2} \begin{bmatrix} -\sigma^i & \sigma^i \\ \sigma^i & \sigma^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sigma^j & \sigma^j \\ \sigma^j & \sigma^j \end{bmatrix} \\ &= -\frac{i}{2} \begin{bmatrix} \sigma^i \sigma^j & \\ & \sigma^i \sigma^j \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \begin{bmatrix} \sigma^k & \\ & \sigma^k \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}J_i &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ipq} \Sigma^{pq} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_{ipq} \varepsilon_{pqk}}{2} \begin{bmatrix} \sigma^k & \\ & \sigma^k \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sigma^i & \\ & \sigma^i \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\Sigma^{\mu\nu} \rightarrow \bar{A}, \bar{B}$$

$$\bar{A} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \bar{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \bar{B} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{\sigma} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
S(\Lambda) &= e^{\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}} \\
&= e^{i(\alpha_i J_i + \beta_i k_i)} \\
&= \begin{bmatrix} \text{algo} & 0 \\ 0 & \text{algo} \end{bmatrix} \\
\psi = \begin{bmatrix} \text{algo} \\ 0 \end{bmatrix} &\rightarrow \psi' \begin{bmatrix} \text{algo}' \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

## 4. Guía 2 - Formulación lagrangiana

La formulación matemática del lagrangiano se conoce como “jet”.

Supongamos un lagrangiano que depende de un único campo  $\phi$ . Entonces las ecuaciones de Euler-Lagrange son

$$\frac{\partial \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right)}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \rightarrow \text{Euler-Lagrange}$$

que se anota en forma compacta

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \rightarrow \text{Euler-Lagrange}$$

### Box 15 - Sobre la derivada parcial del lagrangiano

$$\frac{\partial \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right)}{\partial x^\mu} \rightarrow \text{No es una derivada parcial sino una total}$$

No sé por qué se lo anota así y no así

$$\frac{d \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right)}{dx^\mu}$$

O quizá no entendí nada. Creo que sería mejor anotar

$$d_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \rightarrow \text{Euler-Lagrange}$$

Consideremos el lagrangiano de Klein-Gordon

$$\mathcal{L}_{\text{KG}} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 \rightarrow \text{Lagrangiano de Klein-Gordon}$$

Para obtener la ecuación de Klein-Gordon aplicamos Euler-Lagrange: primero calculamos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2 \phi$$

Para calcular el término  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}$  primero vamos a escribir al lagrangiano en una forma en que sea evidente que depende de esto, así

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{KG}} &= \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 \\
&= \frac{(\partial_t \phi)^2 - (\partial_x \phi)^2 - (\partial_y \phi)^2 - (\partial_z \phi)^2}{2} - \frac{m^2}{2} \phi^2
\end{aligned}$$

Entonces vemos que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \partial^\mu \phi$$

(me parece que en realidad es  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}$ ).

Por último calculamos la ecuación de Klein-Gordon

$$\begin{aligned}
\partial_\mu (\partial^\mu \phi) - (-m^2 \phi) &= 0 \\
(\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \phi &= 0
\end{aligned}$$

**Caso complejo** Cuando tenemos un campo de Klein-Gordon complejo lo que tenemos que hacer es modificar el lagrangiano así:

$$\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi^*) (\partial_\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi$$

Hay dos formas de operar ahora:

1. La forma directa de operar es considerar que  $\phi = \phi_1 + i\phi_2$  y entonces tenemos dos campos independientes  $\phi_1$  y  $\phi_2$ , aplicamos Euler-Lagrange a esos campos.
2. Una forma media rara es considerar que  $\phi$  y  $\phi^*$  son variables independientes y aplicar Euler-Lagrange a ellos directamente. En realidad no son independientes ya que si  $\phi = 86e^{3i}$  entonces  $\phi^* = 86e^{-3i}$ , pero bueno. Parece que el truco funciona.

**Lagrangiano con una interacción** Consideremos que

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 - F(\phi)$$

donde  $F(\phi)$  nos da el potencial, por ejemplo  $F(\phi) = \phi^4$ . Debido a que  $\frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi$  es la energía cinética y todo lo demás es el potencial (recordar que  $\mathcal{L} = T - V$ ) entonces le ponemos el signo negativo explícito afuera de  $F$  y elegimos una  $F$  acotada por debajo.

A partir de este lagrangiano obtenemos la siguiente ecuación de Euler-Lagrange

$$\partial^\mu \partial_\mu \phi + m^2 \phi + F'(\phi) = 0$$

**Lagrangiano de Dirac** El lagrangiano de Dirac es

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi \rightarrow \text{Dirac}$$

Recordemos que  $\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix}$ . Para aplicar Euler-Lagrange a este lagrangiano hay que considerar que  $\psi$  es un simple número,

no un array de números (creo que en verdad el lagrangiano es un array de lagrangianos  $\mathcal{L} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_1 \\ \mathcal{L}_2 \\ \mathcal{L}_3 \\ \mathcal{L}_4 \end{bmatrix}$ ). Además hay que considerar que

$$\left. \begin{matrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{matrix} \right\} \rightarrow \text{los consideramos independientes}$$

El lagrangiano de Dirac se puede escribir en forma más compacta como

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi$$

Debido a que  $\bar{\psi}$  aparece simplemente multiplicando (no tiene derivadas ni nada) entonces lo más fácil es obtener la ecuación de Euler-Lagrange a partir de  $\bar{\psi}$ , es decir

$$\cancel{\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} \right)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = 0 \rightarrow \text{Euler-Lagrange para } \bar{\psi}$$

$$-(i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi =$$

Si calculamos la ecuación de Euler-Lagrange para  $\psi$  vamos a obtener la misma ecuación pero para  $\bar{\psi}$ .

**Transformación del lagrangiano** Consideremos un cambio tal que se produce un cambio  $\delta\phi$  en el campo ( $\delta\phi$  es a primer orden respecto al parámetro de la transformación). Queremos ver cuánto vale  $\delta\mathcal{L}$ . El hecho de haber “deformado” a  $\phi$  en  $\delta\phi$  induce un cambio en sus derivadas  $\partial_\mu \phi$  y es

$$\delta(\partial_\mu \phi) = \partial_\mu (\delta\phi) \rightarrow \text{Conmuta}$$

Entonces la variación del lagrangiano será

$$\begin{aligned}
 \delta\mathcal{L} &= \delta\phi \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} + \delta(\partial_\mu\phi) \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \\
 &= \delta\phi \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} + \partial_\mu(\delta\phi) \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \\
 &= \underbrace{\delta\phi \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \delta\phi \partial_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right)}_{\text{Queremos que esto se anule}} + \partial_\mu \left( \delta\phi \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right) \\
 &= -\delta\phi E(\mathcal{L}) + \partial_\mu \left( \delta\phi \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right)
 \end{aligned}$$

donde  $E(\mathcal{L})$  es una notación común para las ecuaciones de Euler-Lagrange.

**Simetrías variacionales** En ciertos casos podría ocurrir que el cambio en el lagrangiano sea la derivada total de “algo”, es decir

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu F^\mu \rightarrow \text{Simetría variacional}$$

y en este caso se dice que  $\delta\phi$  es una simetría variacional. En este caso tendríamos que (juntándolo con lo anterior)

$$\partial_\mu \left( \delta\phi \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} - F^\mu \right) = \delta\phi E(\mathcal{L})$$

Si  $\phi$  satisface la ecuación de Euler-Lagrange entonces aparece la corriente de Noether

$$J^\mu = \delta\phi \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} - F^\mu \rightarrow \text{Corriente de Noether}$$

tal que

$$\partial_\mu J^\mu \approx 0$$

donde el símbolo  $\approx$  significa “on-shell” y quiere decir “cuando vale la ecuación de movimiento”. La corriente de Noether satisface

$$\begin{aligned}
 \int d^3x \partial_\mu J^\mu &\approx 0 \\
 \int d^3x \partial_0 J^0 + \int d^3x \partial_i J^i &\approx \leftarrow \text{Expandimos en coordenadas} \\
 \underbrace{\partial_0 \int d^3x J^0}_{Q} + \int d^3x \partial_i J^i &\approx
 \end{aligned}$$

Lo anterior nos habla de la conservación de la carga

$$\partial_0 Q \approx 0$$

#### Box 16 - Simetrías variacionales y simetrías de la ecuación de movimiento

Las simetrías de una ecuación de movimiento son mucho más amplias que las simetrías variacionales del lagrangiano.

**Ejemplo: transformación de simetría variacional de Klein-Gordon real sin masa** El lagrangiano es  $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi$ . Consideremos la transformación

$$\delta\phi = a \rightarrow \text{Transformación}$$

Es trivial ver que  $\delta\mathcal{L} = 0$  lo cual implica que

$$\partial_\mu F^\mu = 0$$

y podemos “elegir”

$$F^\mu = 0 \rightarrow \text{Lo elegimos pues satisface } \partial_\mu F^\mu = 0$$

Entonces la corriente de Noether será

$$\begin{aligned}
 J^\mu &= a \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \\
 &= a\partial^\mu\phi
 \end{aligned}$$

Entonces el teorema de Noether nos dice que

$$\begin{aligned}\partial_\mu J^\mu &\approx 0 \\ a\partial_\mu \partial^\mu \phi &\approx\end{aligned}$$

que es una gilada pues era la ecuación de Klein-Gordon que ya la sabíamos.

**Ejemplo: Klein-Gordon complejo** Consideremos el lagrangiano  $\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi)^* \partial_\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$  y la transformación de simetría

$$\phi \rightarrow e^{i\alpha} \phi \rightarrow \text{Transformación de simetría}$$

con  $\alpha \in \mathbb{R}$ . El cambio en el campo será

$$\begin{aligned}\delta\phi &\stackrel{\text{def}}{=} \text{primer orden de } e^{i\alpha} \phi - \phi \\ &= i\alpha\phi\end{aligned}$$

y

$$\delta\phi^* = -i\alpha\phi^*$$

por lo que el cambio del lagrangiano será

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &= \underbrace{\mathcal{L}(\phi + \delta\phi)}_{\text{a primer orden}} - \mathcal{L}(\phi) \\ &\vdots \\ &= 0\end{aligned}$$

Nuevamente (igual que en el ejemplo previo) podemos considerar que

$$F^\mu = 0 \rightarrow \text{Lo elegimos igual que antes}$$

y entonces la corriente de Noether es

$$\begin{aligned}J^\mu &= \delta\phi \partial^\mu \phi^* + \delta\phi^* \partial^\mu \phi \\ &= i\alpha\phi \partial^\mu \phi^* - i\alpha\phi^* \partial^\mu \phi \\ &= i\alpha(\phi \partial^\mu \phi^* - \phi^* \partial^\mu \phi)\end{aligned}$$

Ahora verificaremos que  $\partial_\mu J^\mu \approx 0$  (recuérdese que el símbolo  $\approx$  significa “cuando se cumple la ecuación de movimiento”, en este caso Klein-Gordon). Entonces tenemos que

$$\begin{aligned}\partial_\mu J^\mu &= \cancel{\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^*} + \phi \partial_\mu \partial^\mu \phi^* - \cancel{\partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi} - \phi^* \partial_\mu \partial^\mu \phi \\ &\approx 0\end{aligned}$$

**Lagrangianos invariantes de Poincaré** Nosotros estaremos interesados en lagrangianos invariantes de Poincaré. En particular la ecuación de Klein-Gordon es invariante de Poincaré pues si  $\phi(x)$  es solución, también lo es  $\phi(\Lambda x + a)$ .

Consideremos la transformación de Poincaré

$$x \rightarrow \Lambda x + a$$

Para ver cómo se modifica el lagrangiano  $\mathcal{L}$  necesitamos la transformación a primer orden

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + \xi^\mu \rightarrow \text{a primer orden}$$

Cuando  $\xi$  es constante es una simple traslación. En otros casos  $\xi$  es otra cosa, como en un boost. “Suele ocurrir” que el lagrangiano se modifica así

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \underbrace{(\xi^\mu \mathcal{L})}_{F^\mu}$$

y

$$\delta\phi = \xi^\mu \partial_\mu \phi \rightarrow \text{A primer orden en } \xi$$

En este caso la corriente de Noether será

$$J^\mu = \delta\phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} - \xi^\mu \mathcal{L}$$

**Ejemplo: simetría ante traslación temporal** Consideremos la transformación dada por  $t \rightarrow t + a$ . En este caso  $\xi^\mu = [a \ 0 \ 0 \ 0] = a\delta^\mu_0$ . Entonces  $\delta\phi = a\delta^\mu_0\partial_\mu\phi = a\partial_0\phi$

### Teorema de Noether

Dada una simetría continua de  $S$  entonces la ecuación de Euler-Lagrange serán proporcionales a  $\partial_\mu j^\mu$ . Entonces si se cumplen las ecuaciones de Euler-Lagrange resulta que

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

siendo

$$j^\mu{}_a \omega^a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_r)} \Delta\phi - \delta^\mu_\nu \mathcal{L} \Delta x^\nu$$

$$\Delta\phi_r = S^{-1}(\omega_a) \phi_r(\Lambda x) - \phi_r(x) \rightarrow \text{A primer orden en los parámetros}$$

$$x' = \Lambda x \rightarrow \text{Lorentz}$$

$$x'^\nu = x^\nu + \Delta x^\nu$$

$$x'^\nu = x^\nu + \frac{1}{2} \omega_{\rho\sigma} (M^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu x^\nu$$

### Ejemplo: Klein-Gordon, simetría de Lorentz

$$x'^\nu = x^\nu + \frac{1}{2} \omega_{\rho\sigma} (M^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu x^\nu$$

$$(M^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu = \eta^{\rho\mu} \delta^\sigma_\nu - \eta^{\sigma\mu} \delta^\rho_\nu$$

$$x'^\nu = x^\nu + \frac{1}{2} \omega_{\rho\sigma} (\eta^{\rho\mu} \delta^\sigma_\nu - \eta^{\sigma\mu} \delta^\rho_\nu) x^\nu$$

$$\Delta\phi \stackrel{S=1}{=} \phi \left( x^\mu + \frac{1}{2} \omega_{\rho\sigma} (M^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu x^\nu \right) - \phi(x^\mu)$$

$$\text{A primer orden} \rightarrow \approx \partial_\mu \phi \frac{1}{2} (M^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu x^\nu \omega_{\rho\sigma}$$

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$$

$$\begin{aligned} j^\mu{}_{\rho\sigma} \omega_{\rho\sigma} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \Delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^*)} \Delta\phi^* - \mathcal{L} \Delta x^\mu \\ &= \omega_{\rho\sigma} \left[ \partial^\mu \phi^* \partial_\lambda \phi \frac{1}{2} (M^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu x^\nu + \partial^\mu \phi \partial_\lambda \phi^* \frac{1}{2} (M^{\rho\sigma})^\lambda{}_\nu x^\nu - (\partial_\lambda \phi^* \partial^\lambda \phi - m^2 \phi^* \phi) \frac{1}{2} (M^{\rho\sigma})^\lambda{}_\nu x^\nu \right] \end{aligned}$$

## 5. Guía 3

### 5.1. Introducción

#### 5.1.1. Repaso de oscilador armónico cuántico

El oscilador armónico clásico unidimensional se puede pensar como una teoría clásica de campos en una dimensión. La dimensión es el tiempo. Para cada tiempo vamos a tener un valor de  $x(t)$  que representa nuestro campo. La ecuación de movimiento para este campo es

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \rightarrow \text{Newton}$$

con  $\omega > 0$ . Las soluciones, como ya sabemos, son

$$x(t) = A e^{i\omega t} + A^* e^{-i\omega t} \in \mathbb{R}$$

Variando la parte real y la imaginaria de  $A$  logramos cualquier condición inicial.

En el caso cuántico vamos a usar el picture de Heisenberg en el que

$$\overline{x(t)} = \underline{a} e^{-i\omega t} + \underline{a}^\dagger e^{i\omega t}$$

donde el operador  $\overline{x(t)}$  es la solución de la ecuación

$$\overline{\ddot{x}(t)} + \omega \overline{x(t)} = 0$$

### 5.1.2. Klein-Gordon

Ahora vamos a aplicar lo mismo que Heisenberg pero a los campos. Tenemos un campo que satisface una ecuación

$$(\square^2 + m^2) \phi(t, x, y, z) = 0 \rightarrow \text{Klein-Gordon clásico}$$

y vemos acá la analogía con el oscilador armónico:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega^2 \right) x(t) = 0 \rightarrow \text{Oscilador armónico clásico 1D}$$

La solución clásica para Klein-Gordon es

$$\phi(x) = \int \left( A(\mathbf{k}) e^{ik^\mu x_\mu} + A^*(\mathbf{k}) e^{-ik^\mu x_\mu} \right) d^3k$$

El hamiltoniano ahora es

$$\mathcal{H} = \int \frac{1}{2} \left( (\partial_0 \phi)^2 + \sum_{i=1}^3 (\partial_i \phi)^2 + m^2 \phi^2 \right) d^3x$$

Usando el momento conjugado

$$\pi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi)} = \dots = \partial_0 \phi$$

vemos que el hamiltoniano es

$$\mathcal{H} = \int \frac{1}{2} \left( \pi^2 + m^2 \phi^2 + \sum_{i=1}^3 (\partial_i \phi)^2 \right) d^3x$$

Vemos que la densidad hamiltoniana es

$$\underbrace{\pi^2 + m^2 \phi^2}_{\sim p^2 + \omega^2 x^2} + \underbrace{\sum_{i=1}^3 (\partial_i \phi)^2}_{\text{Acoplamiento}}$$

y reconocemos una reminiscencia del oscilador armónico unidimensional cuyo hamiltoniano era  $\sim p^2 + \omega^2 x^2$ . Aquí tenemos términos adicionales de acoplamiento entre puntos vecinos del espacio del campo. Por ello se dice que el campo de Klein-Gordon son infinitos osciladores armónicos uno al lado del otro y todos acoplados.

El campo en términos de creación y destrucción es

$$\begin{cases} \underline{\phi} = \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{\underline{a}_{\mathbf{k}} e^{ikx} + \underline{a}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{-ikx}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} d^3k \\ \underline{\pi} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int (\underline{a}_{\mathbf{k}} e^{ikx} - \underline{a}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{-ikx}) \frac{\sqrt{\omega_{\mathbf{k}}}}{\sqrt{2}} d^3k \end{cases}$$

Las relaciones de conmutación son

$$\begin{cases} [\underline{a}_{\mathbf{k}}, \underline{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \delta_D(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \mathbf{1} \\ [\underline{\phi}(x, t), \underline{\pi}(x', t)] = i\delta_D(x - x') \end{cases}$$

El hamiltoniano cuántico es la versión cuántica del clásico que vimos hace un rato

$$\overline{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} \int : (\partial_t \underline{\phi})^2 + \sum_i (\partial_i \underline{\phi})^2 + m^2 \underline{\phi}^2 : d^3x$$

## Box 17 - Orden normal

Cuando se hace “orden normal” lo que hay que hacer es mandar todos los  $\bar{a}^\dagger$  hacia adelante y los  $\bar{a}$  hacia el final, olvidándose de la relación de conmutación. Por ejemplo

$$: \bar{a} \bar{a}^\dagger := \bar{a}^\dagger \bar{a}$$

Se puede decir de manera más formal y bonita, pero si vamos a los fierros sólo hay que dar vuelta los  $\bar{a}$  y los  $\bar{a}^\dagger$ .

Para poder analizar mejor este hamiltoniano usamos la identidad de las transformadas de Fourier que es

$$\int f(x) g(x) dx \sim \int \tilde{f}(k) \tilde{g}(-k) dk$$

donde  $\tilde{f}$  y  $\tilde{g}$  son las transformadas de Fourier. Usando esto se termina llegando a la expresión

$$\overline{\mathcal{H}} = \int \omega_{\mathbf{k}} \bar{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \bar{a}_{\mathbf{k}} d^3k \rightarrow \text{Habiendo usado orden normal}$$

Si no usáramos lo de orden normal nos quedaba que  $\overline{\mathcal{H}} = \int \omega_{\mathbf{k}} \bar{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \bar{a}_{\mathbf{k}} d^3k + \frac{\infty}{2}$  donde ese  $\infty$  es el análogo al  $\frac{1}{2}$  del oscilador armónico común.

Para el momento lineal, la cantidad asociada a la conservación para las traslaciones espaciales, es (caso clásico, guía 2)

$$p^i = \int \partial_i \phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_t \phi} d^3x$$

Haciendo todas las cuentitas

$$\underline{\bar{p}} = \int \mathbf{k} \bar{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \bar{a}_{\mathbf{k}} d^3k$$

**Energía del primer excitado** Consideremos el estado  $|1\rangle = \bar{a}_{\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle$ . Para encontrar su energía hacemos

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{H}} \bar{a}_{\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle &= (\bar{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \overline{\mathcal{H}} + [\overline{\mathcal{H}}, \bar{a}_{\mathbf{k}}^\dagger]) |0\rangle \\ \overline{\mathcal{H}} |0\rangle = 0 \rightarrow &= [\overline{\mathcal{H}}, \bar{a}_{\mathbf{k}}^\dagger] |0\rangle \\ \text{Hacer cuentita} \rightarrow &= \omega_{\mathbf{k}} \bar{a}_{\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle \end{aligned}$$

En consecuencia  $|1\rangle = \bar{a}_{\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle$  es autoestado de  $\overline{\mathcal{H}}$  con autovalor  $\omega_{\mathbf{k}}$ .

**El segundo excitado** Debido a las reglas de conmutación sabemos que

$$\bar{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \bar{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger |0\rangle = \bar{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger \bar{a}_{\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle$$

con lo cual las partículas parecerían ser bosones ya que no importa en qué orden se crean. La energía es

$$\overline{\mathcal{H}} \bar{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger \bar{a}_{\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle = (\omega_{\mathbf{k}'} + \omega_{\mathbf{k}}) \bar{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger \bar{a}_{\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle$$

## 5.2. Cosas

Por qué la función de un punto no se usa? Es decir

$$\langle 0 | \overline{\phi(x)} | 0 \rangle = ?$$

Si usamos que  $\overline{\phi(x)} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int (\bar{a}_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}x} + \bar{a}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{i\mathbf{k}x}) \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}}$  donde  $\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{m^2 + |\mathbf{k}|^2}$ . Haciendo la cuentita es fácil ver que se anula.

Una cosa importante que se usa mucho en campos es la función de correlación dada por

$$\text{Es una distribución!} \rightarrow \langle 0 | \overline{\phi(x)} \overline{\phi(y)} | 0 \rangle \rightarrow \text{Correlación, función de dos puntos}$$

Parece que con un teorema que vamos a ver se tiene que una función de  $N$  puntos se puede siempre reducir a una función de dos puntos. Vamos a hacer la cuenta

$$\begin{aligned}
 F(x, y) &= \langle 0 | \overline{\phi(x)} \overline{\phi(y)} | 0 \rangle \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int e^{iky} e^{-ik'x} \overbrace{\langle 0 | \overline{a_{\mathbf{k}'}} \overline{a_{\mathbf{k}}} | 0 \rangle}^{\delta_D(\mathbf{k}-\mathbf{k}')} \frac{d^3k d^3k'}{2\sqrt{\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'}}} \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{ik(y-x)} \frac{d^3k}{2\omega_{\mathbf{k}}} \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{ik(y-x)}}{\sqrt{|\mathbf{k}^2| + m^2}} d^3k
 \end{aligned}$$

de donde vemos que

$$F(x, y) = H(x - y)$$

Para seguir con la cuenta podemos distinguir dos casos:

1. Si  $\begin{cases} x = (t, \mathbf{x}) \\ y = (t, \mathbf{y}) \end{cases}$ , es decir que están al mismo tiempo, tenemos que

$$H(x - y) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{ik(\mathbf{y}-\mathbf{x})}}{\sqrt{|\mathbf{k}^2| + m^2}} d^3k$$

2. Si  $\begin{cases} x = (t_1, \mathbf{x}) \\ y = (t_2, \mathbf{y}) \end{cases}$ , o sea en el mismo lugar pero a distintos tiempos, tenemos que

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{i\omega_{\mathbf{k}}(t_2-t_1)}}{\sqrt{|\mathbf{k}^2| + m^2}} d^3k$$

Los dos casos anteriores sumados al hecho (que aún no vimos) de que  $H(x - y)$  es invariante frente a transformaciones de Lorentz hace que siempre para dos  $x, y$  cualesquiera se pueda elegir una transformación de Lorentz tal que reducimos el problema a uno de los dos casos anteriores.

**Prueba de que es invariante de Lorentz** Hay dos formas para ver que  $H(x - y)$  es invariante de Lorentz. La primera que es la más fierrera es meter una transformación en  $\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{ik(y-x)}}{\sqrt{|\mathbf{k}^2| + m^2}} d^3k$  y verificar que queda invariante. Para ello hay que verificar que

$$\frac{d^3k}{\omega_{\mathbf{k}}} \rightarrow \text{Invariante de Lorentz}$$

es invariante. La otra forma, más elegante, es la siguiente. Consideremos una transformación de Poincaré  $(\Lambda, a)$  tal que  $x \rightarrow \Lambda x + a$ . Queremos ver que

$$\overline{\phi(\Lambda x + a)} = \overline{U_{(\Lambda, a)}}^\dagger \overline{\phi(x)} \overline{U_{(\Lambda, a)}}$$

donde  $\overline{U_{(\Lambda, a)}}$  es un operador unitario que genera la transformación (del mismo modo que  $\overline{U_{t_2 \leftarrow t_1}}$  es la evolución temporal). Vamos a tener que

$$\overline{U_{(\Lambda, a)}} = e^{-i(\overline{\Sigma}_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} + \overline{p}_\mu a^\mu)} \rightarrow \text{Grupo de transformaciones unitarias}$$

siendo  $\overline{p}_0 = \overline{\mathcal{H}}$  lo cual nos recupera la traslación temporal. Una consecuencia de todo lo anterior es que

$$\overline{U_{(\Lambda, a)}} |0\rangle = |0\rangle$$

Veamos ahora que la función de dos puntos  $F(x, y)$  es invariante. Para ello calculamos

$$\begin{aligned}
 F(\Lambda x + a, \Lambda y + a) &= \langle 0 | \overline{\phi(\Lambda x + a)} \overline{\phi(\Lambda y + a)} | 0 \rangle \\
 &= \langle 0 | \overline{U}^\dagger \overline{\phi(x)} \overline{U} \overline{U}^\dagger \overline{\phi(y)} \overline{U} | 0 \rangle \\
 \overline{U_{(\Lambda, a)}} |0\rangle = |0\rangle &\rightarrow = \langle 0 | \overline{\phi(x)} \overline{\phi(y)} | 0 \rangle
 \end{aligned}$$

### 5.3. Algo de función de dos puntos

Habíamos visto que  $\langle 0 | \phi_1(x_2, t_1) \phi_2(x_2, t_2) | 0 \rangle$  era un invariante de Poincaré. La expresión del campo es (recordemos)

$$\phi = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} (\bar{a}_k e^{ikx} + \bar{a}_k^\dagger e^{-ikx})$$

donde  $[\bar{a}_k, \bar{a}_{k'}^\dagger] = \delta_D(k - k')$ . Además tenemos las soluciones de frecuencia positiva y negativa dadas por

$$\begin{cases} \phi^+ = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \bar{a}_k^\dagger e^{-ikx} \\ \phi^- = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \bar{a}_k e^{ikx} \end{cases}$$

No estoy seguro de por qué anotó lo siguiente

$$\langle 0 | \phi_1^-(x_1, t_1) \phi_2^+(x_2, t_2) | 0 \rangle$$

(creo que es lo que termina quedando luego de hacer la cuenta). Ahora anotó lo siguiente

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_q}} \underbrace{\langle 0 | a(q) a^\dagger(k) | 0 \rangle}_{\underbrace{\langle 0 | [a(q), a^\dagger(k)] | 0 \rangle}_{\delta_D(q-k)}} e^{-i(kx_2 - qx_1)} \\ \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} e^{-ik \cdot (x_2 - x_1)}$$

Ahora queremos ver que esta integral es invariante. Hay varios trucos (como vimos la clase pasada). Uno de los trucos es hacer

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^3} \delta^4(k^2 - m^2) \Theta_H(k^0)$$

Tres casos

$$(x_2 - x_1)^2 \begin{cases} < 0 & \rightarrow \text{Spacelike} \\ > 0 & \rightarrow \text{Timelike} \\ = 0 & \rightarrow \text{Lightlike} \end{cases}$$

donde

$$(x_2 - x_1)^2 = (x_2 - x_1)^\mu (x_2 - x_1)^\nu \eta_{\mu\nu}$$

Vamos a resolver el caso *spacelike*. Lo que estamos viendo es del libro de Greiner cuando analiza la función  $\Delta_1$ . Entonces vamos a calcular

$$\begin{aligned} W_2 &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} e^{ik \cdot (x_2 - x_1)} \rightarrow \text{Caso spacelike} \\ \text{Pasamos a esféricas} \rightarrow &= \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^\infty d|k| |k|^2 \frac{e^{i|k||x-y|\cos\theta}}{\sqrt{k^2 + m^2}} \\ \left. \begin{aligned} z &= |k||x-y|\cos\theta \\ dz &= -|k||x-y|\sin\theta d\theta \\ d\theta \sin\theta &= -\frac{dz}{|k||x-y|} \end{aligned} \right\} \rightarrow &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{|x-y|} \int \frac{dk |k| \sin(k|x-y|)}{\sqrt{k^2 + m^2}} \\ &= \frac{m}{(2\pi)^2} \frac{1}{|x-y|} \int_0^\infty dt \sinh(t) \sin(m|x-y|t) \\ &= \frac{m}{(2\pi)^2} \frac{1}{|x-y|} K_1(m|x-y|t) \end{aligned}$$

$K_1$  creo que es una función de Bessel o algo de eso.

La función de dos puntos completa (que contempla los tres casos  $\begin{cases} \text{timelike} \\ \text{spacelike} \\ \text{lightlike} \end{cases}$ ) es

$$W_2 = \underbrace{-\frac{1}{4\pi} \varepsilon(x^0) \delta_D^+(x^2) \frac{m}{8\pi\sqrt{x^2}} \Theta_H(x^2) \left[ N_1(m\sqrt{x^2}) + i\varepsilon(x^0) J_1(m\sqrt{x^2}) \right]}_{\text{Término timelike}} + \underbrace{\frac{m}{4\pi^2\sqrt{-x^2}} \Theta_H(-x^2) K_1(m\sqrt{-x^2})}_{\text{Término spacelike}}$$

donde  $x^2 = x^\mu x_\mu$  siendo  $x^\mu$  lo que antes llamamos  $x - y$  y  $\varepsilon(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \alpha > 0 \\ -1 & \alpha < 0 \end{cases}$ .

**Box 18 - Letras...**

Los griegos y los latinos inventaron muchas letras, cada una en su formato mayúsculo, minúsculo, cursivo, impreso, etc. En total deben haber más de 100 símbolos distintos disponibles. Y a todo lo llamamos de la misma manera,  $x$  se usó en lo anterior para 20 cosas distintas. Por qué!?!?

Ahora queremos calcular el conmutador

$$\begin{aligned} [\phi(x), \phi(y)] &= [\phi^-(x), \phi^+(y)] + [\phi^+(x), \phi^-(y)] + \cancel{[\phi^+(x), \phi^+(y)]} + \dots \text{ todo se cancela} \\ &= \langle 0 | [\phi^-(x), \phi^+(y)] | 0 \rangle \end{aligned}$$

La última igualdad es media trucha pues a la izquierda tenemos  $[\phi(x), \phi(y)]$  que es un operador, que termina siendo un operador del tipo algo  $\times \mathbb{1}$  con lo cual es como si el  $\mathbb{1}$  no estuviera y sólo quedara el “algo”, y por eso decimos que es un número. Pero es medio trucho.

$$\begin{aligned} [\phi(x), \phi(y)] &= W_2(x - y) - W_2(y - x) \\ &= i\Delta(x - y) \rightarrow \text{Función de Pauli-Jordan} \end{aligned}$$

**Guía 3, ejercicio 15**

Tenemos por consigna el propagador

$$\begin{aligned} \Delta(x - y) &= -i \langle 0 | T(\phi(x) \phi(y)) | 0 \rangle \\ &= -i \langle 0 | [\Theta_H(x^0 - y^0) \phi(x) \phi(y) + \Theta_H(y^0 - x^0) \phi(y) \phi(x)] | 0 \rangle \end{aligned}$$

donde  $T(\dots)$  denota “temporalmente ordenado” y lo que hace es poner a la izquierda a los de tiempo más grande (o sea que los operadores terminan aplicándose “en orden cronológico”). Obsérvese que nos quedó que  $\Delta(x - y)$  es la suma de dos funciones de dos puntos (las asociadas a cada una de las thetas de Heaviside. Es decir que

$$\Delta(x - y) = -i\Theta_H(x^0 - y^0) W_2(x - y) - i\Theta_H(y^0 - x^0) W_2(y - x)$$

**Box 19 - Motivación para los propagadores**

Nos interesan los propagadores de que se obtienen a partir del producto  $T$ -ordenado pues son útiles para describir interacciones. Por ejemplo si tenemos un  $| \text{inicial} \rangle$  y un  $| \text{final} \rangle$  vamos a calcular

$$\langle \text{final} | \text{inicial} \rangle = \langle \text{final} | T(\phi(x_1) \phi(x_2) \dots) | \text{inicial} \rangle$$

Para saber cómo calcular esto vamos a usar el teorema de Wick

**Teorema de Wick** Relaciona el producto  $T$ -ordenado con el producto  $N$ -ordenado (orden normal). El teorema de Wick para bosones es

$$\begin{aligned} T(\phi_1 \phi_2 \dots \phi_n) &= : \phi_1 \phi_2 \dots \phi_n : + \sum_{\text{todas las contracciones simples}} : \phi_1 \dots \widehat{\phi_i \dots \phi_j} \dots \phi_n : + \dots \\ &\dots + \sum_{\text{todas las contracciones dobles}} : \phi_1 \dots \widehat{\phi_i \dots \phi_j} \dots \widehat{\phi_k \dots \phi_\ell} \dots \phi_n : + \dots \end{aligned}$$

donde

$$: \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 : \equiv : \phi_1 \phi_3 : \langle 0 | T(\phi_2 \phi_4) | 0 \rangle$$

(los campos rojos se contraen entre sí, no sé cómo hacer la notación típica en la PC).

**Ejemplo** Consideremos

$$T(\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4) = : \phi_1\phi_2\phi_3\phi_4 : + : \phi_1\phi_2\phi_3\phi_4 : + : \phi_1\phi_2\phi_3\phi_4 : + : \phi_1\phi_2\phi_3\phi_4 : + \dots$$

$$\dots + : \phi_1\phi_2\phi_3\phi_4 : + : \phi_1\phi_2\phi_3\phi_4 :$$

Los campos coloreados se contraen entre sí.

**¿Qué ecuación satisface el propagador?** Veremos que cumple la ecuación de movimiento (Klein-Gordon) pero no homogénea sino que igualada a una delta de Dirac. Para ello vamos a calcular primer

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^0} \Delta(x-y) &= -i \langle 0 | [\delta_D^\phi(x^0 - y^0)(x) \phi(y) - \delta_D^\phi(y^0 - x^0)(y) \phi(x)] | 0 \rangle + \dots \\ &\dots - i \langle 0 | [\Theta_H(x^0 - y^0) \partial_0 \phi(x) \phi(y) + \Theta_H(y^0 - x^0) \phi(y) \partial_0 \phi(x)] | 0 \rangle \\ &= -i \delta_D^{\phi} (x^0 - y^0) \underbrace{0 [\phi(x) \phi(y) - \phi(y) \phi(x)]}_{[\phi(x), \phi(y)]} | 0 \rangle + \dots \\ &\dots - i \langle 0 | [\Theta_H(x^0 - y^0) \partial_0 \phi(x) \phi(y) + \Theta_H(y^0 - x^0) \phi(y) \partial_0 \phi(x)] | 0 \rangle \\ &= -i \langle 0 | \underbrace{\delta_D^{\phi} (x^0 - y^0) \phi(x), \phi(y)}_{[\phi(x), \phi(x)]_{x^0=y^0} \equiv 0} | 0 \rangle + \dots \\ &\dots - i \langle 0 | [\Theta_H(x^0 - y^0) \partial_0 \phi(x) \phi(y) + \Theta_H(y^0 - x^0) \phi(y) \partial_0 \phi(x)] | 0 \rangle \\ &= -i \langle 0 | [\Theta_H(x^0 - y^0) \pi(x) \phi(y) + \Theta_H(y^0 - x^0) \phi(y) \pi(x)] | 0 \rangle \end{aligned}$$

Ahora calculamos la derivada segunda

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{(\partial x^0)^2} \Delta(x-y) &= -i \langle 0 | \delta_D (x^0 - y^0) (\pi(x) \phi(y) - \phi(y) \pi(x)) \underbrace{\delta_D^{\pi} (x^0 - y^0) \pi(x), \phi(y)}_{[\pi(x), \phi(y)]_{x^0=y^0} \equiv -i \delta_D(x-y)} | 0 \rangle + \dots \\ &= \dots - i \langle 0 | [\Theta_H(x^0 - y^0) \partial_0^2 \phi(x) \phi(y) + \Theta_H(y^0 - x^0) \phi(y) \partial_0^2 \phi(x)] | 0 \rangle \end{aligned}$$

Ahora usamos que  $\phi(x)$  satisface Klein-Gordon  $(\partial_0^2 - \partial_i^2 + m^2) \phi(x) = 0$  por lo tanto  $\partial_0^2 \phi(x) = -(-\partial_i^2 + m^2) \phi(x)$  con lo cual

$$\frac{\partial^2}{(\partial x^0)^2} \Delta(x-y) = -\delta_D^-(x-y) (-\partial_i^2 + m^2) \Delta(x-y)$$

y entonces

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \Delta(x-y) = -\delta_D(x-y) \rightarrow \text{EOM para el propagador}$$

(EOM  $\equiv$  equation of motion).

Si ahora aplicamos la transformada de Fourier

$$\Delta(z \equiv x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \tilde{\Delta}(k) e^{-ikz}$$

$$\delta_D^-(z) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{-ikz}$$

Metiendo esto en la ecuación

$$(-k^2 + m^2) \tilde{\Delta}(k) = -1 \quad \Rightarrow \quad \tilde{\Delta}(k) = \frac{1}{k^2 - m^2}$$

Lo anterior está bien para cualquier valor de  $k$  que no sea “on shell”. Para los casos “on shell” se tiene que las ecuaciones de movimiento se satisfacen y entonces  $k^2 = m^2$  y diverge. La forma de resolver este problema es modificar al propagador según

$$\tilde{\Delta}(k) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-1}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \rightarrow \text{No se sabe si el signo está bien}$$

(como el  $\Delta$  es una distribución entonces parece que al multiplicarlo por alguna función tal que no sé qué, el límite converge).

Ahora calculamos la antitransformada de Fourier

$$\Delta(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{-1}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{-ik^0 z^0} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{z}}$$

Primero vamos a integrar en  $k^0$  para resolver el problema de la divergencia (lo del límite  $\varepsilon \rightarrow 0$ ). O sea vamos a arrancar calculando

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk^0 \frac{-1}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{-ik^0 z^0} = \int_{\mathbb{R}} dk^0 \frac{1}{k^0 - \omega_k + i\varepsilon} \frac{1}{k^0 + \omega_k - i\varepsilon} e^{-ik^0 z^0}$$

El integrando tiene polos en  $k^0 = \pm(\omega_k - i\varepsilon)$ . Para hacer la cuenta vamos a usar el teorema de los residuos. Para ello tenemos que decidir cómo vamos a cerrar el contorno de integración, si por arriba o por abajo. Vamos a elegirlo en función del signo de  $z^0$  (es lo que en la teórica vimos como la prescripción de Feynman). El motivo de esto es para evitar la divergencia de la exponencial, pues

$$\int_{\mathbb{R}} dk^0 \frac{1}{k^0 - \omega_k + i\varepsilon} \frac{1}{k^0 + \omega_k - i\varepsilon} e^{-ik^0 z^0} = \int_{\mathbb{R}} dk^0 \frac{1}{k^0 - \omega_k + i\varepsilon} \frac{1}{k^0 + \omega_k - i\varepsilon} e^{-i\text{Re}(k^0)z^0} e^{\text{Im}(k^0)z^0}$$

Si queremos que  $e^{\text{Im}(k^0)z^0}$  no diverja tenemos que modificar el contorno en función del signo de  $z^0$ . Lo que nos termina quedando es que

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk^0 \frac{-1}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{-ik^0 z^0} = \Theta_H(z^0) \frac{(-2\pi i)}{2\omega_k} e^{-i\omega_k z^0} + \Theta_H(-z^0) \frac{(2\pi i)}{(-2\omega_k)} e^{i\omega_k z^0}$$

(aquí ya hemos tomado el límite  $\varepsilon \rightarrow 0$ ).

Ahora metemos esto en la expresión de  $\Delta$  y obtenemos finalmente

$$\Delta(z) = \frac{i}{(2\pi)^3} \left[ \Theta_H(z^0) \underbrace{\int \frac{d^3k}{2\omega_k} e^{-ik^\mu x z_\mu}}_{W_2(z)} + \Theta_H(-z^0) \int \frac{d^3k}{2\omega_k} e^{ik^\mu z_\mu} \right]$$

donde ahora el  $k^0$  está sujeto a la restricción  $k^0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ .

## 6. Guía 4 - Cuantización del campo de Dirac

### 6.1. Campo clásico de Dirac

Recordemos el lagrangiano que era

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi$$

del cual se obtiene la ecuación de Dirac

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0$$

Esta ecuación nos genera soluciones de frecuencia positiva y negativa

$$\begin{cases} u(k) = N e^{-ikx} \begin{pmatrix} \xi \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}}{uMm} \xi \end{pmatrix} \\ v(k) = N e^{ikx} \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}}{\omega+m} \xi \\ \xi \end{pmatrix} \end{cases}$$

Si  $\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}$  lo escribimos como

$$\begin{aligned} \xi &= \xi^{(1)} + \xi^{(2)} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

entonces nos queda

$$\begin{cases} u^{(r)} = N e^{-ikx} \begin{bmatrix} \xi^{(r)} \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}}{\omega+m} \xi^{(r)} \end{bmatrix} \\ v^{(r)} = N e^{ikx} \begin{bmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}}{\omega+k} \xi^{(r)} \\ \xi^{(r)} \end{bmatrix} \end{cases} \quad r \in \{1, 2\}$$

donde  $\xi^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  y  $\xi^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  y el índice  $r$  indica la polarización. Entonces una solución general es

$$\psi(x) = \int \sum_{r=1}^2 \left( b^{(r)}(k) u^{(r)} + d^{(r)}(k) v^{(r)} \right) d^3k \rightarrow \text{Solución general de Dirac}$$

Obsérvese que aquí no nos importa la normalización de  $\psi$ .

### 6.2. Cuantización

Ahora vamos a cuantizar el campo de Dirac. Para ello promoveremos a  $\psi$  a operador y entonces (ahora sí importa la normalización)

$$\overline{\psi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi^3}} \int \sum_{r=1}^2 \left( \overline{b^{(r)}(k)} u^{(r)}(k) e^{-ikx} + \overline{d^{(r)}(k)}^\dagger v^{(r)}(k) e^{ikx} \right) \sqrt{\frac{m}{\omega_k}} d^3k$$

donde  $u$  y  $v$  son arrays de cuatro números y  $\overline{b}$  y  $\overline{d}$  son los operadores de partículas y antipartículas, que NO son arreglos de cuatro operadores sino que simplemente son “operadores comunes”. Obsérvese que  $\overline{\psi}^\dagger \neq \overline{\psi}$ . Los  $u$  y los  $v$  están normalizados tal que

$$\text{Normalización} \rightarrow \begin{cases} \overline{u}^{(r)}(k) u^{(s)}(k) = \delta_{rs} \\ \overline{v}^{(r)}(k) v^{(s)}(k) = -\delta_{rs} \end{cases}$$

Recordar que  $\overline{u} = u^\dagger \gamma^0$ . Además

$$\text{Identidades mágicas} \rightarrow \begin{cases} u^{\dagger(r)} u^{(s)} = \frac{k^0}{m} \delta_{rs} \\ u^{\dagger(r)} u^{(s)} = -\frac{k^0}{m} \delta_{rs} \\ u^{\dagger(r)}(k) v^{(s)}(-k) = 0 \end{cases}$$

Tenemos el momento conjugado

$$\begin{aligned} \pi &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \psi)} \\ &= i\psi^\dagger \end{aligned}$$

#### Box 20 - Tipo de dato .espinor de Dirac cuantizado y la operación †

Los  $\psi$  (clásicos) son arrays de cuatro números, es decir  $\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix}$ . Cuando lo promovemos a operador, tenemos que

$\overline{\psi}$  es un arreglo de cuatro operadores

$$\overline{\psi} = \begin{bmatrix} \overline{\psi_1} \\ \overline{\psi_2} \\ \overline{\psi_3} \\ \overline{\psi_4} \end{bmatrix}$$

La operación de † sobre el operador se aplica así:

$$\overline{\psi}^\dagger = \begin{bmatrix} \overline{\psi_1} \\ \overline{\psi_2} \\ \overline{\psi_3} \\ \overline{\psi_4} \end{bmatrix}^\dagger = [\overline{\psi_1}^\dagger \quad \overline{\psi_2}^\dagger \quad \overline{\psi_3}^\dagger \quad \overline{\psi_4}^\dagger]$$

Parece que la relación de anticonmutación que se obtiene para los  $\overline{\psi}$  es

$$\left\{ \overline{\psi}_a(\mathbf{x}, t), i \overline{\psi}_b(\mathbf{x}', t)^\dagger \right\} = i \delta_D^{\delta_{ij}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') [ab]$$

donde los subíndices  $a$  y  $b$  denotan las distintas componentes  $\begin{bmatrix} \overline{\psi_1} \\ \overline{\psi_2} \\ \overline{\psi_3} \\ \overline{\psi_4} \end{bmatrix}^\dagger$ . Obsérvese que lo anterior es una matriz, o algo así (ya es medio un quilombo la notación a esta altura)

$$\begin{aligned} \left\{ \overline{\psi(x)}, i \overline{\psi(x')}^\dagger \right\} &= i \left( \overline{\psi(x)} \overline{\psi(x')}^\dagger - \overline{\psi(x')}^\dagger \overline{\psi(x)} \right) \in \text{matrices de operadores de } 4 \times 4 \\ &= \begin{bmatrix} \overline{11} & \overline{12} \\ \overline{21} & \ddots \end{bmatrix} \rightarrow \text{Una matriz de operadores} \end{aligned}$$

Se replican las reglas de anticonmutación para los operadores de creación y destrucción para las partículas y las antipartículas

$$\begin{cases} \left\{ \overline{b^{(r)}(k)}, \overline{b^{(s)}(k)}^\dagger \right\} = \delta_D^{\delta_{ij}}(k - k') [rs] & \rightarrow \text{Partículas} \\ \left\{ \overline{d^{(r)}(k)}, \overline{d^{(s)}(k)}^\dagger \right\} = \delta_D^{\delta_{ij}}(k - k') [rs] & \rightarrow \text{Antipartículas} \end{cases}$$

Los operadores  $\overline{b}$  y  $\overline{d}$  son “números”, es decir que son un único operador y no son un arreglo de cuatro operadores. Existen identidades que son

$$\text{Unas identidades} \rightarrow \begin{cases} \sum_{s=1}^2 u_a^{(s)}(\mathbf{k}) \overline{u}_b^{(s)}(\mathbf{k}) = \left( \frac{\not{k} + m}{2m} \right)_{ab} \\ \sum_{s=1}^2 v^{(s)}(\mathbf{k}) \overline{v}^{(s)}(\mathbf{k}) = \frac{\not{k} - m}{2m} \end{cases} \rightarrow \text{Este objeto es una matriz}$$

donde  $\not{k} = k^\mu \gamma_\mu$ . Estas identidades se deducen de  $\left\{ \overline{\psi(x)}, \overline{\psi(x')}^\dagger \right\}$ . Si reemplazamos  $\overline{\psi(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi^3}} \int \sum_{r=1}^2 \left( \overline{b^{(r)}(k)} u^{(r)}(k) e^{-ikx} + \overline{d^{(r)}(k)} v^{(r)}(k) e^{-ikx} \right)$  obtenemos

$$\left\{ \overline{\psi(x)}, \overline{\psi(x')}^\dagger \right\} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int \delta_D^e(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \dots \sum_{s=1}^2 \dots \frac{m d^3k d^3k'}{\sqrt{\omega_k \omega_{k'}}$$

El hamiltoniano y el  $\mathbf{p}$  son

$$\text{Para Dirac} \rightarrow \begin{cases} \overline{\mathcal{H}} = \int \sum_{r=1}^2 \omega_k \left( \overline{b}_k^r \dagger \overline{b}_k^r + \overline{d}_k^r \dagger \overline{d}_k^r \right) d^3k \\ \overline{\mathbf{p}} = \int \sum_{r=1}^2 \mathbf{k} \left( \overline{b}_k^r \dagger \overline{b}_k^r + \overline{d}_k^r \dagger \overline{d}_k^r \right) d^3k \end{cases}$$

### 6.3. Corriente de Noether de Dirac

El lagrangiano de Dirac es invariante ante  $\psi \rightarrow e^{i\alpha} \psi$  por lo tanto según Noether tenemos una corriente que está dada por

$$\overline{\psi} \gamma^\mu \psi \rightarrow \text{Corriente de Noether}$$

La carga es

$$Q = \int \psi^\dagger \psi d^3x \leftarrow \text{Componente 0 de la corriente}$$

Entonces el operador de carga es

$$\overline{Q} = \int \sum_{r=1}^2 \left( \overline{b}_k^r \dagger \overline{b}_k^r - \overline{d}_k^r \dagger \overline{d}_k^r \right) d^3k \rightarrow \text{Operador carga}$$

## Guía 4, ejercicio 7

Queremos calcular el anticonmutador  $\{\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(y)\}$  donde  $\alpha$  y  $\beta$  son subíndices que nos dicen de qué componente del espinor estamos hablando. Para ello reemplazamos los  $\psi$  por sus expresiones

$$\begin{cases} \psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{k_0/m}} \sum_r \left( u_r(\mathbf{k}) b_{r,k} e^{-ikx} + v_r(\mathbf{k}) d_{r,k}^\dagger e^{ikx} \right) \\ \bar{\psi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{k_0/m}} \sum_r \left( \bar{u}_r(\mathbf{k}) b_{r,k}^\dagger e^{ikx} + \bar{v}_r(\mathbf{k}) d_{r,k} e^{-ikx} \right) \end{cases}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \{\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(y)\} &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{\sqrt{k_0/m}} \int \frac{d^3q}{\sqrt{q_0/m}} \sum_{r,s} \left[ u_r^\alpha(k) \bar{u}_s^\beta(q) \{b_{rk}, b_{sq}^\dagger\} e^{-i(kx-ty)} + v_r^\alpha(k) \bar{v}_s^\beta(q) \{d_{rk}^\dagger, d_{sq}\} e^{-i(kx-ty)} \right] \\ \begin{cases} \{b_{rk}, d_{sq}^\dagger\} = \delta_{rs} \delta_D(\mathbf{k}-\mathbf{q}) \\ \{d_{rk}, d_{sq}^\dagger\} = \delta_{rs} \delta_D(\mathbf{k}-\mathbf{q}) \end{cases} \rightarrow &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{2k_0} (\not{k} + m)_{\alpha\beta} e^{-ik(x-y)} + \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{2k_0} (\not{k} + m)_{\alpha\beta} e^{ik(x-y)} \\ &= (i\not{\partial} + m)_{\alpha\beta} \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{2k_0} (e^{-ik(x-y)} - e^{ik(x-y)})}_{\text{Esto es el conmutador del campo escalar}} \end{aligned}$$

Esto nos habla de la microcausalidad.

## Guía 4, ejercicio 8

Vamos a definir al propagador de Dirac como

$$iS_{\alpha\beta} = \langle 0 | T(\psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y)) | 0 \rangle \rightarrow \text{Propagador}$$

Ahora tenemos que tener en cuenta el signo que aparece por el hecho de que  $\psi$  son fermiones. Esto es

$$T(\psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y)) = \Theta_H(x^0 - y^0) \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y) - \Theta_H(y^0 - x^0) \bar{\psi}_\beta(y) \psi_\alpha(x)$$

donde el signo  $-$  es la diferencia con respecto al campo escalar (o los bosones en general, creo). Entonces

$$iS_{\alpha\beta} = \Theta_H(x^0 - y^0) \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{\sqrt{k_0/m}} \int \frac{d^3q}{\sqrt{q_0/m}} u_r^\alpha(k) \bar{u}_s^\beta(q) e^{-ikx+iqy} \langle 0 | b_r(k) b_s^\dagger(q) | 0 \rangle + \text{todas las combinaciones}$$

Ahora hacemos

$$\begin{aligned} \langle 0 | b_r(k) b_s^\dagger(q) | 0 \rangle &= \langle 0 | \{b_r(k), b_s^\dagger(q)\} | 0 \rangle \\ &= \delta_{rs} \delta_D(\mathbf{k}-\mathbf{q}) \end{aligned}$$

por lo tanto

$$iS_{\alpha\beta} = \Theta_H(x^0 - y^0) (i\not{\partial} + m) \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{2k_0} e^{-ik(x-y)} + \Theta_H(y^0 - x^0) (i\not{\partial} + m) \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{2k_0} e^{ik(x-y)}$$

Aquí vemos que esto tiene el aspecto de un propagador de Feynman del campo escalar pero sobre el cual actúa el operador  $(i\not{\partial} + m)$ . En particular es

$$\boxed{iS_{\alpha\beta} = (i\not{\partial} + m) i\Delta_F(x-y)} \quad \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial(x^\mu - y^\mu)}$$

Obsérvese que en la cuenta anterior aparece un término adicional cuando “sacamos de factor común a  $(i\not{\partial} + m)$ ”. Parece que ese término adicional es

$$\text{término adicional} = \underbrace{\gamma^0 \delta_D(x^0 - y^0) \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{2k_0} (e^{-ik(x-y)} - e^{ik(x-y)})}_{[\phi(x), \phi(y)]}$$

$$= \gamma^0 \delta_D(x^0 - y^0) \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{2k_0} (e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} - e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})})$$

$\left\{ \begin{array}{l} k_0 = \sqrt{k^2 + m^2} \\ \text{El integrando es impar} \end{array} \right.$

Ahora consideramos la transformada de Fourier de  $S$

$$\begin{aligned}
 iS_{\alpha\beta} &= (i\not{\partial} + m) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \\
 &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \underbrace{\frac{\not{k} + m}{k^2 - m^2 + i\varepsilon}}_{\mathcal{F}\{iS_{\alpha\beta}(k)\}} \\
 (\not{k} + m)(\not{k} - m) &= \gamma^\nu \gamma^\mu k_\mu k_\nu - m^2 \\
 \gamma^\nu \gamma^\mu &= \frac{\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} + [\gamma^\mu, \gamma^\nu]}{2} = \eta^{\mu\nu} \rightarrow = k^2 - m^2 \\
 \frac{\not{k} + m - i\varepsilon}{(\not{k} + m - i\varepsilon)(\not{k} - m + i\varepsilon)} \\
 \tilde{S}_{\alpha\beta} &= (\not{k} - m + i\varepsilon)^{-1}
 \end{aligned}$$

¿?¿?...

El propagador siempre va a cumplir la ecuación homogénea de la teoría que estemos considerando. En este caso la ecuación de Dirac. Es decir

$$S_{\alpha\beta}(z) = (i\not{\partial} + m) \Delta_F(z) \quad z \equiv x - y$$

Si multiplicamos por  $(i\not{\partial} - m)$  a ambos lados encontramos

$$(i\not{\partial} - m) S_{\alpha\beta} = -(\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \Delta_F = \delta_D(z)$$

Esto es otra forma de encontrar la relación entre  $S_{\alpha\beta}$  y  $\Delta_F$  sin hacer toda la cuenta previa.

## 7. Guía 4B - Proca y Maxwell

Son campos que describen partículas con

Proca Masa  $\neq 0$  y espín 1. Se usa para los bosones  $W$  y  $Z$ .

Maxwell Masa = 0 y helicidad 1. Se usa para el fotón.

Dado un campo, por ejemplo el campo escalar  $\phi$ , su masa se define como

$$k^\mu k_\mu = m^2$$

Existe un operador llamado “operador Casimir” (que no tiene que ver con el efecto Casimir) que se define como

$$\bar{p}^\mu \bar{p}_\mu = \bar{p}^2 \rightarrow \text{Operador Casimir}$$

tal que al aplicarlo a un autoestado con  $k$  definido nos da el valor de masa del campo.

La ecuación de Klein-Gordon se puede ver como

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \bar{\phi} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\bar{p}^\mu \bar{p}_\mu \bar{\phi} = -m^2 \bar{\phi}$$

(no entiendo cómo le aplicamos el operador  $\bar{p}^2$  al operador  $\bar{\phi}$ ).

De la misma forma queremos encontrar un operador Casimir para el espín. Se lo define como

$$\bar{w}^\mu \bar{w}_\mu \rightarrow \text{Operador Casimir para espín}$$

donde

$$\bar{w}^\mu = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \bar{p}_\nu \bar{\Sigma}_{\rho\sigma} \rightarrow \text{Vector de Pauli-Lugansky}$$

donde  $\Sigma$  tiene que ver con los generadores del grupo de Lorentz (al parecer son operadores ahora). Parece que, en general,

$$w^0 = \mathbf{p} \cdot \mathbf{J} \rightarrow \text{Helicidad}$$

que es la helicidad. Las demás componentes son otras cosas.

No sé bien cómo llegamos a

$$w^\mu w_\mu = -m^2 J^2 \rightarrow \text{En el sistema con } \mathbf{p} = 0$$

donde  $J^2$  es el momento angular. Entonces de aquí despejamos  $J$  y conocemos el espín.

¿Qué ocurre cuando la masa es nula? “Se puede ver que”

$$\begin{cases} w^\mu p_\mu = 0 \\ w^\mu w_\mu = 0 \end{cases} \rightarrow \text{Cuando } m = 0$$

## 7.1. Campo de Proca

Es un campo “cuadrivectorial” (o sea que ante transformaciones de Lorentz transforma igual que un cuadrivector). Para que tenga espín 1 tenemos que añadir una restricción que es la restricción de transversalidad dada por

$$\partial_\mu Z^\mu = 0 \rightarrow \text{Transversalidad}$$

donde  $Z(x)$  es el campo de Proca. Para entender por qué esto nos plantea una condición de espín 1 consideremos la transformada de Fourier

$$\partial_\mu Z^\mu = 0 \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad k_\mu Z^\mu = 0$$

por lo tanto  $k \perp Z$ . Entonces si nos vamos a un sistema en el que  $k$  sólo tenga componente temporal (y las espaciales nulas, o sea el sistema en reposo) entonces vemos que  $Z$  sí o sí tiene que tener componente temporal nula y componentes espaciales no nulas, con lo cual no será invariante frente a rotaciones (como sí lo será  $k$ ) lo cual nos habla del espín no nulo.

El lagrangiano de Proca es

$$\mathcal{L}_{\text{Proca}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2} Z_\mu Z^\mu$$

donde  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu$ . Esto se obtiene de

$$\begin{cases} \mathcal{L} = \alpha (\partial_\mu Z_\nu) (\partial^\mu Z^\nu) + \beta (\partial_\mu Z^\mu)^2 + \gamma Z_\mu Z^\mu \\ \partial_\nu Z^\mu = 0 \end{cases}$$

La única posibilidad, aparentemente, para los parámetros  $\alpha\beta\gamma$  es tal que te queda el lagrangiano anterior.

La ecuación de movimiento es

$$\partial^\mu \partial_\mu Z^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu Z^\mu) = -m^2 Z^\nu \rightarrow \text{Ecuación de movimiento}$$

Para verificar que esto satisface la ecuación de transversalidad simplemente multiplicamos  $\partial_\nu$  y entonces

$$\cancel{\partial^\mu \partial_\mu (\partial_\nu Z^\nu)} - \cancel{\partial_\nu \partial^\nu (\partial_\mu Z^\mu)} = -m^2 \partial_\nu Z^\nu$$

por lo tanto cumple  $\partial_\nu Z^\nu = 0$ .

La solución general de Proca es

$$Z^\mu(x) = \int \sum_{\lambda=0}^3 (\zeta_\lambda^\mu(\mathbf{k}) e^{-ikx} + \text{complejo conjugado}) d^3k$$

donde los  $\zeta_\lambda^\mu(\mathbf{k})$  son (cuadri)vectores linealmente independientes. O sea, para cada  $\lambda$  se tiene un cuadrivector. Lo anterior cumple  $\square^2 Z^\mu + m^2 Z^\mu = 0$ . Ahora falta imponer la transversalidad que resulta en

$$\zeta_\lambda^\mu(\mathbf{k}) k_\mu = 0 \rightarrow \text{transversalidad}$$

lo cual restringe que sólo pueden haber tres  $\lambda \in \{1, 2, 3\}$  linealmente independiente. Para ello consideremos un  $k^\mu$  que sólo es temporal. Entonces sólo podemos encontrar tres  $\zeta_\lambda^\mu(\mathbf{k})$  que sean ortogonales que son los versores espaciales. Entonces en conclusión la transversalidad nos restringe las polarizaciones

$$Z^\mu(x) = \int \sum_{\lambda=1}^3 (\zeta_\lambda^\mu(\mathbf{k}) e^{-ikx} + \text{complejo conjugado}) d^3k$$

a sólo tres componentes.

Luego de hacer la cuantización y no sé qué más parece que la expresión final del (operador) campo de Proca es

$$\underline{Z}^\mu = \frac{1}{\sqrt{2\pi^3}} \int \sum_{\lambda=1}^3 \left( \overline{a_{\mathbf{k}}^{(\lambda)}} \zeta_\lambda^\mu(\mathbf{k}) e^{-ikx} + \overline{a_{\mathbf{k}}^{(\lambda)}}^\dagger \zeta_\lambda^\mu(\mathbf{k}) e^{ikx} \right) \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}}$$

y se imponen las relaciones de conmutación

$$\left[ \overline{a_{\mathbf{k}}^{(\lambda)}}, \overline{a_{\mathbf{k}'}^{(\lambda')}}^\dagger \right] = \delta_D(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta_{\lambda, \lambda'}$$

El momento canónico conjugado es

$$\begin{aligned} \Pi^\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 Z_\mu)} \\ &= \pm F^{0\mu} \\ &= \partial^0 Z^\mu - \partial^\mu Z^0 \end{aligned}$$

Un problema para cuantizar es que  $\Pi^0 \equiv 0$  y esto no nos permite imponer condiciones de conmutación para las componentes nulas con una delta de Dirac. Entonces las relaciones de conmutación las vamos a imponer sobre las componentes espaciales

$$\left[ \overline{Z(x)}_i, \overline{\Pi(x')}_j \right] = i\delta_D(x-x')\delta_{ij}$$

Existen relaciones de completitud para los  $\zeta$  que son

$$\sum_{\lambda=1}^3 \zeta_\lambda^\mu(\mathbf{k}) \zeta_\lambda^\nu(\mathbf{k}) = \eta^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{m^2} \rightarrow \text{Completitud}$$

Esto se deduce de

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\lambda=0}^3 \zeta_\lambda^\mu(\mathbf{k}) \zeta_\lambda^\nu(\mathbf{k}) = \eta^{\mu\nu} \\ \zeta_0^\mu(\mathbf{k}) = \frac{k_\mu}{m} \rightarrow \text{Es por la condición de transversalidad} \end{array} \right.$$

## 8. Cuantización canónica del campo de Maxwell

Cuando hay una invariancia de gauge tenemos una indeterminación en la dinámica, siempre. El motivo de esto es que a cualquier solución  $A_\mu$  de las ecuaciones de movimiento le podemos sumar cualquier cosa de la forma  $\partial_\mu \Lambda$ , es decir

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda \rightarrow \text{Invariancia de gauge}$$

donde  $\Lambda$  es cualquier función del espaciotiempo. La invariancia de gauge hace que para cualquier condición inicial  $[A_\mu]_{t=0}$  tenemos infinitas soluciones  $A_\mu + \partial_\mu \Lambda$  con  $\Lambda$  cualquier cosa. Esto significa que el hecho de especificar cuánto vale  $A_\mu$  y  $\dot{A}_\mu$  a  $t = 0$  no alcanza para especificar la solución.

El lagrangiano del campo electromagnético libre es

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

con  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ .

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\mu\nu}} = \frac{1}{4} F^{\mu\nu}$$

$$\square^2 A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = 0$$

Para la componente  $\mu = 0$

$$\begin{aligned} \partial^\mu \partial_\mu A^0 - \partial^0 (\partial_\mu A^\mu) &= 0 \\ \cancel{(\partial_0)^2 A^0} - \cancel{(\partial_0)^2 A^0} - (\partial_i)^2 A^0 - \partial^0 \partial_i A^i &= \end{aligned}$$

Esto es un vínculo

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

Hay otro vínculo que es

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A^0)} = 0 = \Pi^0$$

que es el que ya habíamos encontrado en Proca. Recordemos que en Proca

$$\square^2 A^0 - \partial^0 \overbrace{(\partial_\mu A^\mu)}^{=0} + m^2 A^0 = 0 \rightarrow \text{En Proca}$$

de donde podíamos despejar  $A^0$  en términos de las otras. El problema del campo electromagnético es que  $m^2 = 0$  por lo tanto no podemos despejar nada. Lo bueno es que como tenemos libertad de gauge podemos usar el gauge de Coulomb tal que

$$\text{Gauge de Coulomb} \rightarrow \begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \\ A^0 = 0 \end{cases}$$

Entonces directamente nos olvidamos del  $A^0$ . El problema de esto es que no es invariante de Lorentz pues  $A^0 \equiv 0$ .

Vamos a usar el gauge de Lorenz (creo) en el que

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \rightarrow \text{Gauge de Lorenz}$$

## 8.1. Gupta -Bleuler

Las ecuaciones de Maxwell son

$$\square^2 A^\mu - \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu) = 0 \rightarrow \text{Maxwell}$$

Lo que proponen Gupta-Bleuler es cuantizar un campo tal que

$$\square^2 A^\mu = 0 \rightarrow \text{Gupta-Bleuler cuantizan esto}$$

y luego de restringen los estados del sistema a aquellos tal que  $\partial_\mu A^\mu = 0$ .

### Box 21 - ¿Sabías que...

... El **Lorenz** del *gauge de Lorenz* es otro distinto que el **Lorentz** de *las transformaciones de Lorentz*?

Al decir que cuantizan  $\square^2 A^\mu = 0$  también es necesario especificar cuál es el momento canónico respecto del cual imponemos las relaciones de conmutación. Es decir, hay que decir cuál es el lagrangiano que da origen a  $\square^2 A^\mu = 0$  para poder calcular el momento conjugado. Entonces vamos a tomar el lagrangiano de Maxwell y agregar un multiplicador de Lagrange de la forma

$$\mathcal{L}_{\text{Gupta-Bleuler}} = -\frac{F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}}{4} + \Lambda (\partial_\mu A^\mu)^2$$

donde  $\Lambda$  es variable. La ecuación de movimiento que obtenemos es

$$-2F^{\mu\nu}{}_{,\mu} \pm 2\Lambda \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = 0$$

Ahora nos preguntamos si existe algún  $\Lambda$  tal que  $\mathcal{L}_{\text{Gupta-Bleuler}}$  nos dé la ecuación de Klein-Gordon?

Elegimos  $\Lambda = \pm 1$  (uno de esos dos, no recordamos cuál ahora) tal que nos quedan las ecuaciones de Klein-Gordon para cada componente de  $A$ . El lagrangiano es

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{2} \partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu \\ &= -\frac{1}{2} \partial^\mu A_0 \partial_\mu A_0 + \frac{1}{2} \partial^\mu A_i \partial_\mu A_i \end{aligned}$$

Ahora calculamos el momento conjugado

$$\Pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A_\mu)}$$

e imponemos las condiciones de conmutación

$$[A_\mu(\mathbf{x}, t), \Pi^\nu(\mathbf{x}', t)] = i\delta_D(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta^\nu_\mu$$

La solución clásica es

$$A_\mu = \sum_{\Lambda=0}^3 A_k^\Lambda \varepsilon_\mu^\Lambda(k) e^{-ikx} + \text{complejo conjugado}$$

con  $k^2 = 0$ . Vamos a elegir los  $\varepsilon^\Lambda$  tal que

- sean ortogonales entre sí,
- 3 tipo espacio y no entiendo la letra.
- 1 tiempo.
- No entiendo la letra transversales.

Ahora elegimos los  $\varepsilon^\Lambda$  tales que  $\begin{cases} \varepsilon^{(1)} = (0, 1, 0, 0) \\ \varepsilon^{(2)} = (0, 0, 1, 0) \end{cases}$  y  $\varepsilon^{(3)} + \varepsilon^{(0)} \propto k$   $\begin{cases} \varepsilon_\mu^{(3)} \varepsilon^{(3)\mu} = 0 \\ \varepsilon_\mu^{(0)} \varepsilon^{(0)\mu} = 1 \\ \varepsilon_\mu^{(3)} \varepsilon^{(0)\mu} = 0 \end{cases}$ . Entonces el operador de campo es

$$\underline{A}_\mu = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \left( \sum_{\lambda=0}^3 a_k^\lambda \varepsilon_\mu^\lambda(k) e^{-ikx} + \dagger \right) \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k}}$$

Las relaciones de conmutación para los operadores de creación y destrucción son

$$\left[ \underline{a}_k^\lambda, \underline{a}_{k'}^{\lambda' \dagger} \right] = -\eta_{\lambda\lambda'} \delta_D(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$$

El hecho de que para  $\lambda = \lambda' = 0$  el conmutador es negativo, impone que deberán existir estados de norma negativa pues nosotros queremos que  $\bar{a} |0\rangle = 0$  por lo tanto

$$\begin{aligned}\langle 0 | \bar{a} \bar{a}^\dagger | 0 \rangle &= \langle 0 | -1 + \bar{a}^\dagger \bar{a} | 0 \rangle \\ &= -1\end{aligned}$$

La idea de Gustave Laurer permite resolver este problema ya que hace que los estados con  $\lambda = 0$  y  $\lambda = 3$  sean estados no físicos (o sea, sólo admite polarización transversal).

$$\partial_\mu \bar{A}^\mu = \frac{1}{\sqrt{2\pi^3}} \int -i \left( a_k^{(0)} \varepsilon_\mu^{(0)} k^\mu + a_k^{(3)} \varepsilon_\mu^{(3)} k^\mu \right) e^{-ikx} + i \left( \text{Idem pero con } a^\dagger \right) \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k}}$$

Ahora imponemos la condición de estado físico que es

$$(\partial_\mu \bar{A}^\mu)_- |\psi\rangle = 0 \rightarrow \text{Condición de estado físico}$$

donde el subíndice “menos” indica que es la parte de aniquilación.

$$\begin{aligned}\langle \psi | \partial_\mu A^\mu | \psi \rangle &= \langle \psi | (\partial_\mu A^\mu)_- + (\partial_\mu A^\mu)_+ | \psi \rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

Entonces lo que hacemos es pedir que esa cosa dé cero, el valor medio.

## 9. Interacciones

Clásicamente

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi \phi - \lambda \phi^4$$

donde el último término  $\lambda \phi^4$  es una interacción. Se obtiene la ecuación de movimiento

$$\square^2 \phi + m^2 \phi + 4\lambda \phi^3 = 0$$

Existen soluciones comunes entre la ecuación de interacción y la de la teoría libre que es

$$\phi \equiv 0$$

Vamos a asumir que para  $t \rightarrow \pm\infty$  tenemos la solución no interactuante. Luego interactúan durante un rato y dejan de interactuar.

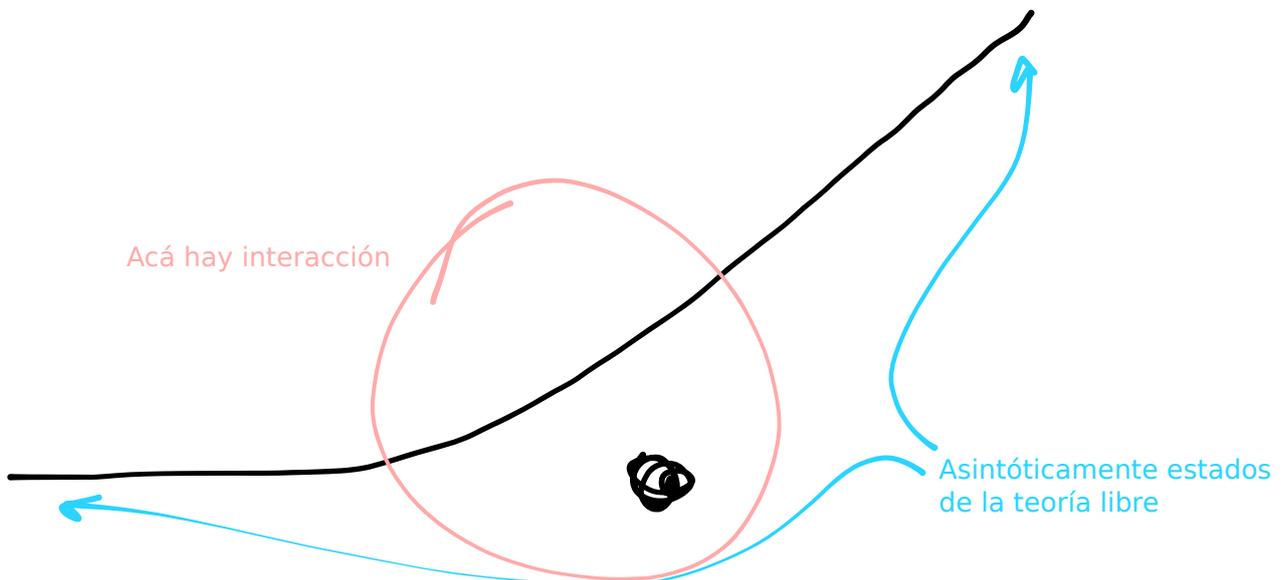
Existe una teoría que hace todo esto de manera formal que es la teoría de Haag-Ruelle ( $\approx 1960$ ).

Vamos a usar el operador

$$\overline{p^\mu} \overline{p_\mu} \equiv \overline{m}^2$$

cuyo espectro es un valor fijo para el vacío, luego el estado que tiene dos partículas tiene un  $4m^2$  como mínimo cuando ambas están en reposo, y a partir de ahí es un continuo. Esto surge de pensar  $p^\mu p_\mu$  sabiendo que los  $p^\mu$  son timelike y que en el sistema en reposo  $p^0 = m$  y  $p^i = 0$ .

### 9.1. Scattering



Los estados inicial y final los vamos a asumir como estados de la teoría no interactuante.

**9.1.1. Ejemplo  $\lambda\phi^3$**

La interacción  $\lambda\phi^3$  es trucha y no realista, pero es más didáctica. Supongamos que el estado inicial es un estado con dos partículas. Como  $\phi \in \mathbb{R}$  es el campo real entonces tenemos un único operador de creación. Entonces

$$|\text{inicial}\rangle = \overline{a_{\mathbf{k}_1}}^\dagger \overline{a_{\mathbf{k}_2}}^\dagger |0\rangle$$

Nos vamos a preguntar la amplitud de transición a un estado

$$|\text{final}\rangle = \overline{a_{\mathbf{k}_3}}^\dagger \overline{a_{\mathbf{k}_4}}^\dagger |0\rangle$$

donde  $|\text{final}\rangle$  no es el estado unívoco al que va a evolucionar el sistema, simplemente nos vamos a preguntar: qué chances hay de que termine en dicho estado? Es decir

$$\mathbb{P}(|\text{inicial}\rangle \rightarrow |\text{final}\rangle) = |\langle \text{final} | \text{inicial} \rangle|^2 \rightarrow \text{Creo}$$

Para ello vamos a usar la matriz de scattering cuyos elementos son

$$\langle \text{final} | T \left( \exp \left( -i \int_{\mathbb{R}^4} \overline{\mathcal{H}_{\text{int}}} d^3x \right) \right) | \text{inicial} \rangle \rightarrow \text{Elemento de matriz } S$$

$\overline{S} \rightarrow \text{Operador de scattering}$

donde el hamiltoniano de interacción viene dado por

$$\overline{\mathcal{H}_{\text{interacción}}} = \lambda : \overline{\phi}^3 :$$

Entonces

$$\overline{S} = \overline{\mathbb{1}} - iT \left( \int \lambda : \overline{\phi}^3 : d^4x \right) + \frac{(-i)^2}{2!} \lambda^2 T \left( \int \int : \overline{\phi}(x)^3 :: \overline{\phi}(x')^3 : dx dx' \right)$$

$$\langle \text{final} | \text{inicial} \rangle - i\lambda \langle \text{final} | \int : \overline{\phi}^3 : d^4x | \text{inicial} \rangle + \text{el último término}$$

Ahora vamos a usar el teorema de Wick. Sin las integrales el teorema de Wick para el término

$$T \left( \int \int : \overline{\phi}(x)^3 :: \overline{\phi}(x')^3 : dx dx' \right)$$

es

$$\langle 0 | \overline{a_{\mathbf{k}_3}} \overline{a_{\mathbf{k}_4}} T \left( \overline{\phi}(x) \overline{\phi}(x) \overline{\phi}(x) \overline{\phi}(x') \overline{\phi}(x') \overline{\phi}(x') \right) \overline{a_{\mathbf{k}_1}}^\dagger \overline{a_{\mathbf{k}_2}}^\dagger | 0 \rangle$$

Para número impar de operadores sabemos que Wick nos dice que va a dar cero. En este caso tenemos seis operadores con lo cual podría ser no nulo. El término  $T(\int \lambda : \overline{\phi}^3 : d^4x)$  es nulo pues tiene 3 operadores.

Ahora vamos a aparear a los campos con los operadores  $\overline{a}$  y  $\overline{a}^\dagger$ . Vamos a aparear así:

$$\langle 0 | \overline{a_{\mathbf{k}_3}} \overline{a_{\mathbf{k}_4}} T \left( \overline{\phi}(x) \overline{\phi}(x) \overline{\phi}(x) \overline{\phi}(x') \overline{\phi}(x') \overline{\phi}(x') \right) \overline{a_{\mathbf{k}_1}}^\dagger \overline{a_{\mathbf{k}_2}}^\dagger | 0 \rangle$$

Otro apareamiento posible sería

$$\langle 0 | \overline{a_{\mathbf{k}_3}} \overline{a_{\mathbf{k}_4}} T \left( \overline{\phi}(x) \overline{\phi}(x) \overline{\phi}(x) \overline{\phi}(x') \overline{\phi}(x') \overline{\phi}(x') \right) \overline{a_{\mathbf{k}_1}}^\dagger \overline{a_{\mathbf{k}_2}}^\dagger | 0 \rangle$$

(lo que anoté con colores es lo que normalmente se anota con las líneas uniendo a los campos, pero no sé cómo hacerlo en Latex). Ahora calculamos cada una de estas contracciones (apareamientos, asociaciones, etc)

$$\text{Contracción entre } \overline{\phi}(x') \text{ y } \overline{a_{\mathbf{k}_1}}^\dagger \rightarrow \langle 0 | \overline{\phi}(x') \overline{a_{\mathbf{k}_1}}^\dagger | 0 \rangle = \dots = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}_3}}} e^{-ik_1x}$$

$$\text{Contracción entre } \overline{a_{\mathbf{k}_3}} \text{ y } \overline{\phi}(x) \rightarrow \langle 0 | \overline{a_{\mathbf{k}_3}} \overline{\phi}(x) | 0 \rangle = \dots = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}_3}}} e^{ik_3x}$$

Entonces tenemos que el primer conjunto de apareamientos

$$\langle 0 | \overline{a_{\mathbf{k}_3}} \overline{a_{\mathbf{k}_4}} T \left( \overline{\phi}(x) \overline{\phi}(x) \overline{\phi}(x) \overline{\phi}(x') \overline{\phi}(x') \overline{\phi}(x') \right) \overline{a_{\mathbf{k}_1}}^\dagger \overline{a_{\mathbf{k}_2}}^\dagger | 0 \rangle$$

es

$$\left(\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\right)^4 e^{-ik_1x'} e^{-ik_2x'} e^{ik_3x} e^{ik_4x} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{k_1}}\sqrt{2\omega_{k_2}}\sqrt{2\omega_{k_3}}\sqrt{2\omega_{k_4}}} \int i \frac{e^{-ik(x-x')}}{k^2 - m^2} d^4k$$

Una de las integrales sería

$$\int e^{i(k_3+k_4-k)x} d^4x = (2\pi)^4 \delta_D^4(k_3 + k_4 - k)$$

$$\int e^{-i(k_1+k_2-k)x'} d^4x' = (2\pi)^4 \delta_D^4(k_1 + k_2 - k)$$

Luego de integrar

$$\left(\prod_{i=1}^4 \frac{1}{\sqrt{2\omega_{k_i}}}\right) \left(\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\right)^4 (2\pi)^4 (2\pi)^4 \int \frac{i \delta_D^4(k - k_3 - k_4) \delta_D(k - k_1 - k_2)}{(2\pi)^4 (k^2 - m^2)} dk$$

$$\frac{i \delta_D^4(k_1 + k_2 - k_3 - k_4)}{(k_1 + k_2)^2 - m^2}$$

Vemos que  $\delta_D^4(k_1 + k_2 - k_3 - k_4)$  lo cual nos habla de la conservación del cuadrimento:

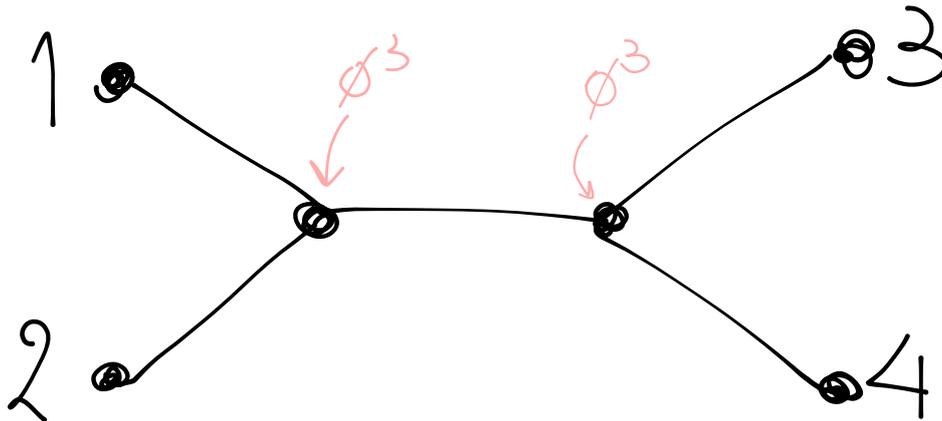
$$\delta_D^4(k_1 + k_2 - k_3 - k_4) \equiv \delta_D^4(k_{\text{inicial}} - k_{\text{final}})$$

. Esto es la expresión final para este término del desarrollo.

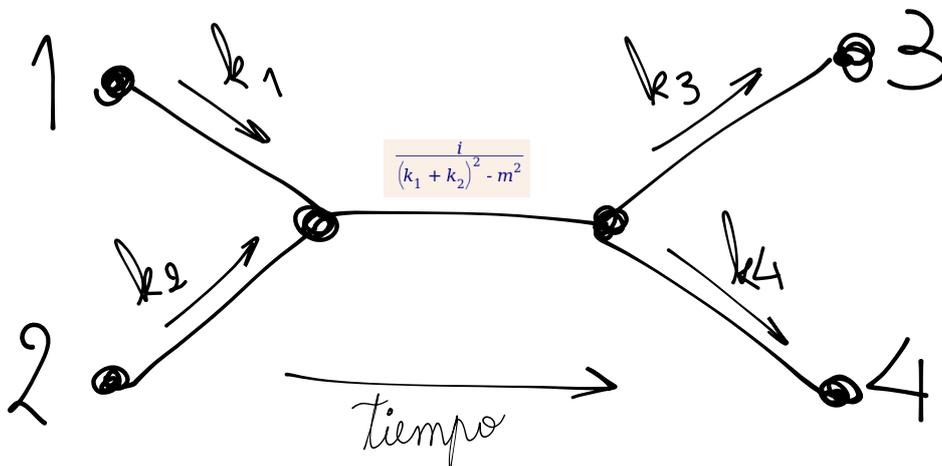
Ahora vamos a hacer la misma cuenta que recién pero en términos de diagramas de Feynman. El apareamiento

$$\langle 0 | \overline{a_{k_3}} \overline{a_{k_4}} T \left( \overline{\phi(x)} \overline{\phi(x)} \overline{\phi(x)} \overline{\phi(x')} \overline{\phi(x')} \overline{\phi(x')} \right) a_{k_1}^\dagger a_{k_2}^\dagger | 0 \rangle$$

es equivalente al diagrama



El hecho de que cada uno de los nodos internos tenga tres patas tiene que ver con que son  $\overline{\phi}^3$ . Además, hay dos nodos internos porque hay un  $\overline{\phi(x)}$  y un  $\overline{\phi(x')}$ . Ahora agregamos los momentos



$$\# \text{de v\u00e9rtices} + \# \text{de caras} - \# \text{de l\u00edneas internas} = 1$$

Usando eso se termina obteniendo que

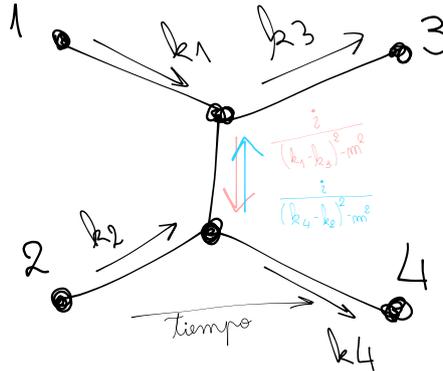
$$\left( (2\pi)^4 \right)^{1 - \# \text{de caras} \equiv \text{loops}}$$

y en este curso NO VAMOS A VER DIAGRAMAS CON LOOPS pues requieren normalizaci\u00f3n. Por lo tanto a cada pata externa le agregamos  $(2\pi)^4$ .

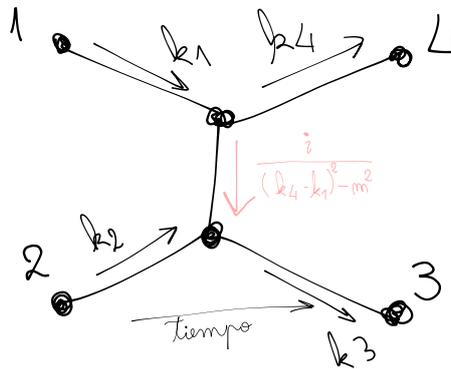
Ahora vamos a hacer el diagrama de la otra contracci\u00f3n, es decir

$$\langle 0 | \overline{a_{k_3}} \overline{a_{k_4}} T \left( \overline{\phi(x)} \overline{\phi(x)} \overline{\phi(x)} \overline{\phi(x')} \overline{\phi(x')} \overline{\phi(x')} \right) \overline{a_{k_1}}^\dagger \overline{a_{k_2}}^\dagger | 0 \rangle$$

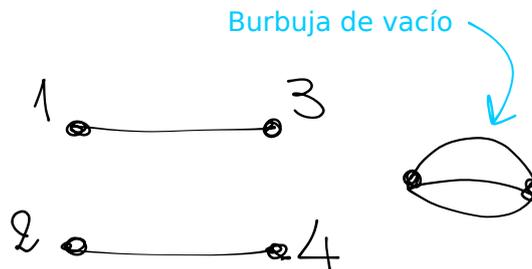
que es



Debido a la conservaci\u00f3n de momento es lo mismo usar el celeste o el rosa. Existe otro diagrama que es el siguiente:



Un diagrama posible hubiera sido



correspondiente a la contracci\u00f3n

$$\langle 0 | \overline{a_{k_3}} \overline{a_{k_4}} T \left( \overline{\phi(x)} \overline{\phi(x)} \overline{\phi(x)} \overline{\phi(x')} \overline{\phi(x')} \overline{\phi(x')} \right) \overline{a_{k_1}}^\dagger \overline{a_{k_2}}^\dagger | 0 \rangle$$

Se contraen entre s\u00ed

El tema es que este diagrama lo descartamos pues se van al utilizar la normalizaci\u00f3n

$$\frac{\langle \text{final} | \overline{\mathcal{S}} | \text{inicial} \rangle}{\langle 0 | \overline{\mathcal{S}} | 0 \rangle} \rightarrow \text{Normalizaci\u00f3n mata burbujas de vac\u00edo}$$

ya que  $\langle 0 | \overline{\mathcal{S}} | 0 \rangle$  incluye todas las burbujas de vac\u00edo.

## 10. Feynman rules and scattering processes

Consideremos un hamiltoniano de interacción

$$\mathcal{H} = -\lambda \int : \bar{\phi}^3 : d^3x$$

Entonces si nos definimos un estado inicial

$$\begin{cases} |i\rangle = \overline{a_{\mathbf{k}_1}}^\dagger \overline{a_{\mathbf{k}_2}}^\dagger |0\rangle & \rightarrow \text{Estado inicial} \\ |o\rangle = \overline{a_{\mathbf{k}_3}}^\dagger \overline{a_{\mathbf{k}_4}}^\dagger |0\rangle & \rightarrow \text{Estado final} \end{cases}$$

Lo que nos interesa calcular es

$$\langle f, \text{out} | i, \text{in} \rangle = \langle f, \text{in} | \overline{S} | i, \text{in} \rangle$$

No tengo idea qué cambia entre  $|f, \text{out}\rangle$  y  $|f, \text{in}\rangle$ .

$$\begin{aligned} S &= T \left( \exp \left( -i\lambda \int : \bar{\phi}^3 : d^3x \right) \right) \\ &= \mathbf{1} + iT \rightarrow \text{Así se define } T \end{aligned}$$

y vamos a querer calcular el  $T$ , creo. El  $\overline{T}$  no es sólo el término lineal, sino que son todos los términos menos el primero.

A primer orden lo anterior da cero (creo) y a segundo orden da

$$\frac{(-i\lambda)^2}{2!} \langle 0 | \overline{a_{\mathbf{k}_3}} \overline{a_{\mathbf{k}_4}} T \left( \int d^3x \int d^3y : \overline{\phi(x)}^3 :: \overline{\phi(y)}^3 : \right) \overline{a_{\mathbf{k}_1}}^\dagger \overline{a_{\mathbf{k}_2}}^\dagger |0\rangle$$

A continuación considerábamos las contracciones que indico en colores:

$$\frac{(-i\lambda)^2}{2!} \langle 0 | \overline{a_{\mathbf{k}_3}} \overline{a_{\mathbf{k}_4}} T \left( \int d^3x \int d^3y : \overline{\phi(x)} \overline{\phi(x)} \overline{\phi(x)} :: \overline{\phi(y)} \overline{\phi(y)} \overline{\phi(y)} : \right) \overline{a_{\mathbf{k}_1}}^\dagger \overline{a_{\mathbf{k}_2}}^\dagger |0\rangle$$

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \left( \overline{\phi(y)} \overline{a_{\mathbf{k}_1}}^\dagger \right) |0\rangle &= \langle 0 | T \left( \int \frac{d^3q}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}}}} \left( \overline{a_{\mathbf{q}}} e^{-iqy} + \overline{a_{\mathbf{q}}}^\dagger e^{iqy} \right) \overline{a_{\mathbf{k}_1}}^\dagger \right) |0\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}_1}}} e^{-ik_1 y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \left( \overline{\phi(x)} \overline{\phi(y)} \right) |0\rangle &= \text{propagador} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \end{aligned}$$

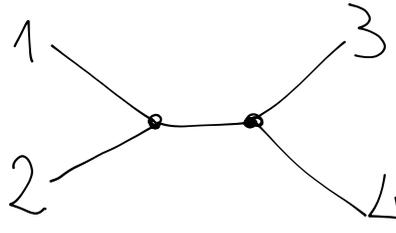
$$\begin{aligned} \langle f | \overline{T^{(2)}} |i\rangle &= \frac{(-if)^2}{2} \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}}}} \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \int dy \int dx e^{-ik_1 y} e^{-ik_2 y} e^{ik_3 x} e^{ik_4 x} e^{-ik(x-y)} \\ &= \frac{(-if)^2}{2} \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}}}} \frac{1}{(k_1 + k_2)^2 - m^2 + i\epsilon} (2\pi)^4 \delta_D(k_1 + k_2 - k_3 - k_4) \end{aligned}$$

donde  $\overline{T^{(2)}}$  es " $\overline{T}$  a segundo orden".

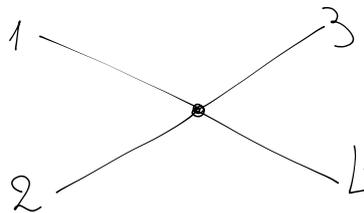
Ahora vamos a traducir esto en diagramas y vamos a usar las siguientes reglas:

1. El propagador  $T \left( \overline{\phi(x)} \overline{\phi(y)} \right)$  se representa por una flechita que une los vértices  $x$  e  $y$ .
2. Las interacciones son  $i\lambda$ .
3. Factor  $\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 \omega_{\mathbf{k}}}}$  por cada línea externa.
4.  $\delta(\sum k_i)$

- 5.  $[(2\pi)^4]^{\text{Vértices-Líneas internas}}$
- 6. Factor de simetría.



**Otro ejemplo: campo escalar real** Consideremos ahora el lagrangiano de interacción  $\mathcal{L} = \lambda \bar{\phi}^4$  y consideremos los mismos estados inicial y final  $\begin{cases} |i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} |0\rangle \rightarrow \text{Estado inicial} \\ |o\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} |0\rangle \rightarrow \text{Estado final} \end{cases}$ . Debido a que  $\bar{\phi}^4$  entonces cada vértice va a tener 4 patas. Entonces el diagrama de orden más bajo será



y usando las reglas de Feynman el término asociado será

$$\prod_{i=1}^4 \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}_i}}} (2\pi)^4 \delta_D(k_1 + k_2 - k_3 - k_4) (-i\lambda)$$

**Otro: campo escalar complejo** Consideremos ahora lo mismo que en el ejemplo previo pero con el campo escalar complejo. CREO que el lagrangiano sería  $\lambda (\bar{\phi}^\dagger \bar{\phi})^2$ . El propagador ahora será

$$\text{propagador} = \langle 0 | T \left( \overline{\phi(x)^\dagger} \overline{\phi(y)} \right) | 0 \rangle$$

Ahora lo vamos a representar con una flecha que va siempre desde el campo dagado al campo sin dagar.



### 10.1. Reglas de Feynman en QED

Recordemos el lagrangiano que era

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = \bar{\psi} (i\not{\partial} - m) \psi - \frac{1}{4} (F_{\mu\nu})^2 - e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi$$

¿Cuáles son las reglas de Feynman para esta teoría?.

$$\langle 0 | T \left( \overline{\psi_\alpha(x)} \overline{\psi_\beta(y)} \right) | 0 \rangle \rightarrow \text{Propagador}$$

$$\frac{i}{\not{k} - m + i\epsilon}$$

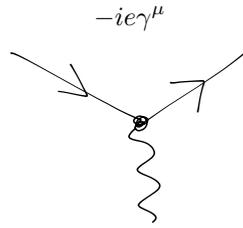
Propagador de Maxwell

$$\langle 0 | T \left( \overline{A_\mu(x)} \overline{A_\nu(y)} \right) | 0 \rangle$$

$$-\frac{ig_{\mu\nu}}{q^2}$$



Vértice



Campo de Dirac

$$\begin{cases} \psi = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{k_0/m}} (u_r(k) b_r(k) e^{-ikx} + v_r(k) d_r^\dagger(k) e^{ikx}) \\ \bar{\psi} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{k_0/m}} (\bar{u}_r(k) b_r^\dagger(k) e^{ikx} + \bar{v}_r(k) d_r(k) e^{-ikx}) \end{cases}$$

Regla para partícula entrante  $b^\dagger$ .

$$|i\rangle = b_r^\dagger(k) |0\rangle$$

$$\langle 0 | \psi b_r^\dagger(k) | 0 \rangle = \left( \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{k_0/m}} u_r(k) \right) e^{-ikx}$$

Por cada  $b$  entrante lo que tenemos que poner es ese factor que aparece entre paréntesis.

¿Qué pasa si tengo un  $d^\dagger$  entrante?

$$\frac{\bar{v}_r(k)}{\sqrt{(2\pi)^3 k_0/m}}$$

$$b_r^\dagger(k) \text{ saliente } \langle 0 | b_r(k)$$

$$\frac{\overline{u_r(k)}}{\sqrt{(2\pi)^3 k_0/m}}$$

$$d_r^\dagger(k) \text{ saliente } \rightarrow \frac{v_r(k)}{\sqrt{(2\pi)^3 k_0/m}}$$

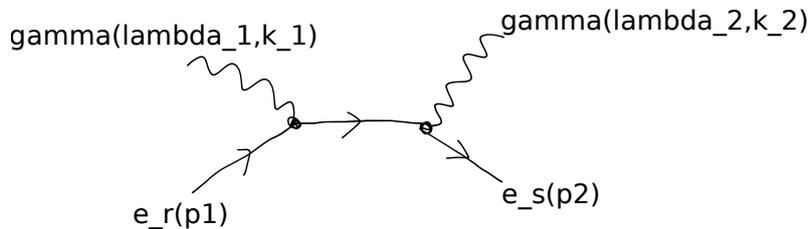
Fotón entrante o saliente:

$$\frac{\varepsilon_\mu^{(\lambda)}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}}}} \in \mathbb{R}$$

**Compton** El efecto compton es el escáterin

$$e\gamma \rightarrow e\gamma$$

Vamos a usar las reglas anteriores para armar el diagrama:

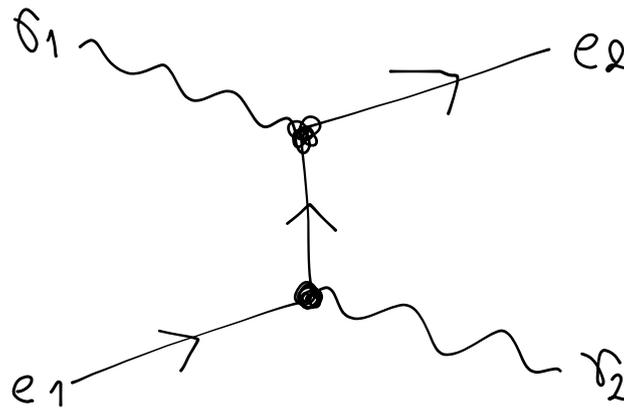


$$\langle 0 | b_s(p_2) a_\nu^{(\lambda_2)}(k_2) (\bar{\psi} \gamma^\rho A_\rho \psi) (\bar{\psi} \gamma^\sigma A_\sigma \psi) a_{\lambda_1}^{(\lambda_1)}(k_1) b_r^\dagger(p_1) | 0 \rangle$$

El término asociado a dicho diagrama es

$$\frac{1}{2!} \overline{u_s(p_2)} \varepsilon_\nu^{\lambda_2}(k_2) (-ie\gamma^\nu) \left( \frac{i}{\cancel{p_1} + \cancel{k_1} - m} \right) (-ie\gamma^\mu) \varepsilon_\mu^{\lambda_1}(k_1) u_r(p_1) \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 (p_1)_0/m}} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 (p_2)_0/m}} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{k_1}}} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{k_2}}}$$

Hay otro diagrama para el efecto Compton que es



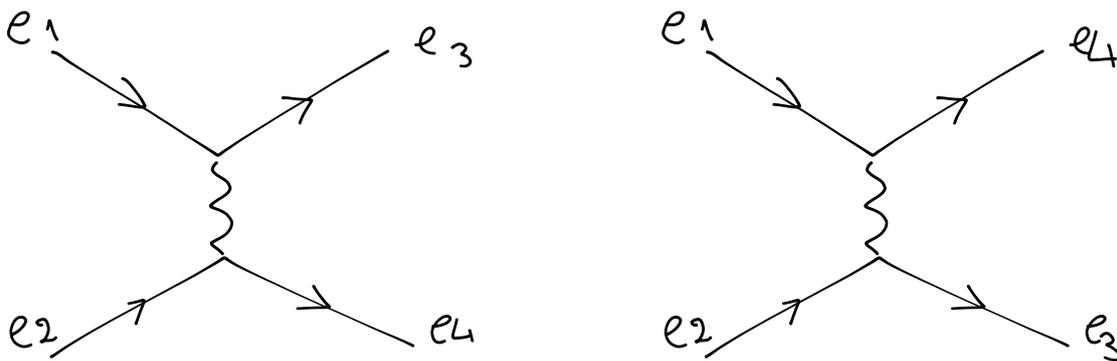
$$\frac{(-ie)}{2!} \bar{u}_s(p_2) \not{\epsilon}(k_1) \frac{i}{\not{p} - \not{k}_2 - m} (-ie) \not{\epsilon}(k_2) u_r(p_1) \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 (p_1)^0/m}} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 (p_2)^0/m}} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{k_1}}} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{k_2}}}$$

Para terminar el efecto Compton a segundo orden sólo habría que sumar estos dos diagramas y listo.

### Scattering de Moller

El proceso es

$ee \rightarrow ee$



El primero de los diagramas tiene el término

$$\bar{u}(p_4 r_4) \gamma^\mu (-ie) u(p_2, r_2) \frac{-ig_{\mu\nu}}{(p_1 - p_3)^2} \bar{u}(p_3, r_3) (-ie \gamma^\nu) u(p_1, r_1) \times \text{factores}$$

y el segundo diagrama es idéntico pero con un signo negativo pues se intercambiaron dos fermiones y va a cambiar el momento que lleva el propagador

$$\frac{-ig_{\mu\nu}}{(p_1 - p_4)^2}$$

## 11. Sección eficaz

Es un concepto que se define para procesos de la forma

$$1 + 2 \rightarrow 3 + 4 + 5 + \dots + N$$

es decir que colisionan dos partículas y se obtiene una colección de  $N - 2$  partículas al final.

En campos la sección eficaz la vamos a definir como la probabilidad asociada a la amplitud

$$\mathcal{M}_{F \leftarrow I} \rightarrow \text{Amplitud de } | \text{inicial} \rangle \rightarrow | \text{final} \rangle$$

entonces

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4}{4\sqrt{((k_1)_\mu (k_2)^\mu)^2 - m_1^2 m_2^2}} \delta_D^4(k_F - k_I) | \mathcal{M} |^2 \prod_{i=3}^N \frac{d^3 k_i}{2(2\pi)^3 \omega_i} \rightarrow \text{Sección eficaz}$$

donde  $\omega_i = \sqrt{|\mathbf{k}_i|^2 + m^2}$  y  $\begin{cases} k_I = k_1 + k_2 \\ k_F = \sum_{i=3}^N k_i \end{cases}$ . La matriz  $\mathcal{M}$  selecciona cuáles partículas iniciales y finales tenemos, por ejemplo

habrá una  $\mathcal{M}_{e^+e^- \rightarrow e^+e^-}$ , habrá otra  $\mathcal{M}_{e^+e^- \rightarrow e^+e^- \gamma}$ , y así. El hecho de que estamos integrando  $d\sigma$  para todos los momentos  $d^3k_i$  implica que no estamos interesados en cuál es el momento que tiene cada una de las partículas finales, sino que sólo nos interesa CUÁLES son las partículas finales pero con cualquier momento. Entonces vamos a tener un  $d\sigma_{e^+e^- \rightarrow e^+e^-}$ , otro  $d\sigma_{e^+e^- \rightarrow e^+e^- \gamma}$ , y así.

La  $\mathcal{M}$  que estamos usando hoy es básicamente la amplitud de la clase pasada pero sin NO ENTIENDO LA LETRA. Recordemos de la clase pasada que

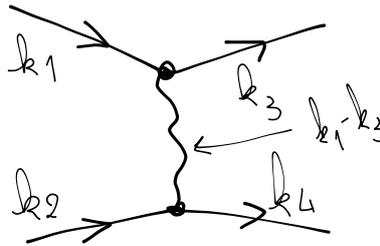
$$\begin{aligned} \bar{S} &= T \left( \exp \left( - \int \overline{\mathcal{H}_{\text{int}}} dt \right) \right) \\ &= \mathbf{1} + i \bar{T} \end{aligned}$$

$$(\bar{S} - \mathbf{1})_{fi} = \bar{T}_{fi}$$

$$\bar{T}_{fi} = (2\pi)^4 \delta_D^4(k_f - k_i) \mathcal{M}_{FI} \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}}$$

Lo bueno de acá es que la  $\mathcal{M}_{FI}$  es invariante de Lorentz, mientras que el  $\bar{T}_{fi}$  aparentemente no lo es.

**Ejemplo de invariancia de Lorentz** Consideremos el siguiente diagrama:



Entonces

$$\mathcal{M} \propto \overbrace{u_{k_3} \gamma^\mu v_{k_1}}^{\text{cuadrivector}} \underbrace{\frac{\eta_{\mu\nu}}{(k_1 - k_3)^2}}_{\text{tensor}} \overbrace{u_{k_4} \gamma^\nu v_{k_2}}^{\text{cuadrivector}} \Rightarrow \text{Invariante de Lorentz}$$

Volviendo a la sección eficaz, veamos cómo se calcula para un proceso

$$1 + 2 \rightarrow 3 + 4$$

en el que todas las partículas tienen la misma masa (por ejemplo  $e^-e^+ \rightarrow e^-e^+$ ). Si nos paramos en el sistema centro de masa entonces tenemos que

$$\text{En sist. centro de masa} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{k}_1 = -\mathbf{k}_2 \\ E_1 = E_2 \end{cases}$$

Entonces la sección eficaz es  $d\sigma = \frac{(2\pi)^4}{4\sqrt{((k_1)_\mu (k_2)^\mu)^2 - m_1^2 m_2^2}} \delta_D^4(k_F - k_I) |\mathcal{M}|^2 \prod_{i=3}^N \frac{d^3k_i}{2(2\pi)^3 \omega_i}$  que se puede pensar como

$$\int f(k_1, k_2, k_3, k_4) \delta_D^3 \left( \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4 \underbrace{-\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2}_{=0} \right) \delta_D(E_3 + E_4 - E_1 - E_2) d^3k_3 d^3k_4 = \int d^3k_4 f(k_1, k_2, k_3, k_4) \delta_D(E_3 + E_4 - E_1 - E_2)$$

Ahora vamos a definir

$$E \equiv E_1 + E_2$$

Además como las masas son todas iguales entonces  $E_3 = E_4$  (sino fueran iguales sería una función más complicada, pero se puede poner  $E_3$  en términos de  $E_4$ ). Entonces

$$\begin{aligned} \delta_D(E_3 + E_4 - E_1 - E_2) &= \delta_D(2E_4 - E) \\ &= \delta_D \left( 2\sqrt{|\mathbf{k}_4|^2 + m^2} - E \right) \end{aligned}$$

entonces la integral previa se convierte en

$$\int d^3 k_4 f(k_1, k_2, k_4, k_4) \delta_D \left( 2\sqrt{|\mathbf{k}_4|^2 + m^2} - E \right)$$

Si la evaluamos en coordenadas esféricas la podemos convertir en

$$\int_0^\infty d|\mathbf{k}_4| d\Omega f(k_1, k_2, k_4, k_4) |\mathbf{k}_4|^2 \delta_D \left( 2\sqrt{|\mathbf{k}_4|^2 + m^2} - E \right)$$

donde  $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ . Ahora vemos que el argumento de la delta se anula en

$$|\mathbf{k}_4| = \sqrt{\left(\frac{E}{2}\right)^2 - m^2}$$

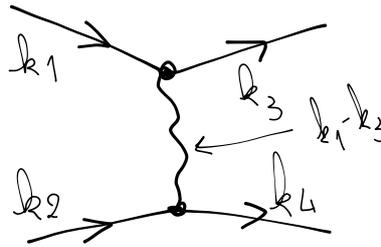
y su derivada

$$\left[ \frac{\partial}{\partial |\mathbf{k}_4|} \left( 2\sqrt{|\mathbf{k}_4|^2 + m^2} - E \right) \right]_{|\mathbf{k}_4| = \sqrt{\left(\frac{E}{2}\right)^2 - m^2}} = \frac{\sqrt{\left(\frac{E}{2}\right)^2 - m^2}}{\frac{E}{2}}$$

y entonces

$$\int_0^\infty d|\mathbf{k}_4| d\Omega f(k_1, k_2, k_4, k_4) \delta_D \left( 2\sqrt{|\mathbf{k}_4|^2 + m^2} - E \right) = \int d\Omega \frac{2E}{\sqrt{\left(\frac{E}{2}\right)^2 - m^2}} f(k_1 k_2 k_3 k_4)$$

Para calcular la  $\mathcal{M}$  consideremos ahora el proceso



tal que el factor asociado es

$$\mathcal{M} = i \frac{(-ie)^2 \overline{u_{k_3, s_3}} \gamma^\mu v_{k_1, s_1} \overline{u_{k_4, s_4}} \gamma_\mu v_{k_2, s_2}}{(k_1 - k_3)^2}$$

(hay altas probabilidades de que haya copiado cualquier cosa en lo anterior, no logro discernir algunos de los símbolos del pizarrón). Si ahora queremos calcular  $|\mathcal{M}|^2$  tenemos que hacer

$$\sum_{s_1=1}^2 \frac{1}{2} \sum_{s_2=1}^2 \frac{1}{2} \sum_{s_3=1}^2 \sum_{s_4=1}^2 |\mathcal{M}_{s_1, s_2, s_3, s_4}|^2$$

donde hemos promediado en  $s_1$  y  $s_2$  (pues consideramos que el haz de entrada está en un estado mezcla) y hemos sumado sobre todas las posibles polarizaciones de salida  $s_3$  y  $s_4$ . Si bien parece que esto complica la cosa, en verdad la hace más fácil. Consideremos un término

$$\begin{aligned} |\overline{u_{k_3, s_3}} \gamma^\mu v_{k_1, s_1}|^2 &= (v_{k_1, s_1})^\dagger (\gamma^\mu)^\dagger (\overline{u_{k_3, s_3}})^\dagger \overline{u_{k_3, s_3}} \gamma^\mu v_{k_1, s_1} \\ (\gamma^\mu)^\dagger &= \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \rightarrow \vdots \\ &= \overline{v_{k_1, s_1}} \gamma^\mu u_{k_3, s_3} \overline{u_{k_3, s_3}} \gamma^\mu v_{k_1, s_1} \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\sum_{s_i=1}^2 \overline{u_1} \gamma^\mu u_3 \overline{u_3} \gamma^\mu u_1 \rightarrow \text{No sé cuáles son } u \text{ y cuáles } v$$

Esto se puede pensar como la traza de una matriz. Para ello coloquemos en forma explícita los índices del producto matricial que hay

$$\sum_{s_1=1}^2 \sum_{s_3=1}^2 (\overline{u_1})_\alpha (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} (u_3)_\beta (\overline{u_3})_\gamma (\gamma_\mu)_{\gamma\eta} (u_1)_\eta = \sum_{s_1=1}^2 \sum_{s_3=1}^2 (u_1)_\eta (\overline{u_1})_\alpha (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} (u_3)_\beta (\overline{u_3})_\gamma (\gamma_\mu)_{\gamma\eta}$$

Acá no lo seguí mucho, a decir verdad. Le quedó

$$\sum_{s_1=1}^2 \sum_{s_3=1}^2 \text{tr} (u_{s_1, k_1} \overline{u_{s_1, k_1}} \gamma^\mu u_{s_3, k_3} \overline{u_{s_3, k_3}} \gamma^\rho) = \text{tr} \left( \cancel{k_1} + m \gamma^\mu \cancel{k_3} + m \gamma^\rho \right)$$

donde hemos usado las “outer product formulæ” para los espinores. Ahora usamos propiedades de las trazas de las gammas

$$\text{tr} (\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4\eta^{\mu\nu}$$

$$\text{tr} (\cancel{k_1} \cancel{k_2}) = 4 (k_1)^\mu (k_1)_\mu$$

$$\text{tr} (\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_{2N+1}}) = 0$$

Estas propiedades NO dependen de la representación usada para las  $\gamma^\mu$ .

### Seguimos con scattering

Recordemos que habíamos visto que en scattering nos interesaban los procesos en los que entran dos partículas y salen dos o más. Consideremos en particular uno

$$12 \rightarrow 34$$

A la hora de hacer las cuentas conviene hacer el cambio de variables a las variables de Mandelstam (o algo así) dado por

$$\begin{cases} s = (p_1 + p_2)^2 & \rightarrow \text{Canal } s \\ t = (p_1 - p_3)^2 & \rightarrow \text{Canal } t \\ u = (p_1 - p_4)^2 \end{cases}$$

La conservación del momento impone que

$$s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 \rightarrow \text{Conservación de momento}$$

En el límite ultrarelativista se tiene que

$$\text{Ultra relativista} \rightarrow \begin{cases} s \approx 2p_1 p_2 \\ t \approx -2p_1 p_3 \\ u \approx -2p_1 p_4 \end{cases}$$

### Guía 5A, ejercicio 11

Vamos a calcular el proceso

$$e^- e^+ \rightarrow e^- e^+$$

Los diagramas de Feynman son

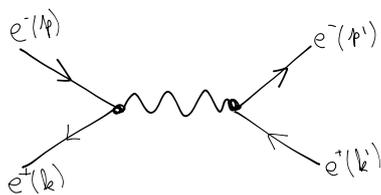


Diagrama de aniquilación  
Diagrama (1)

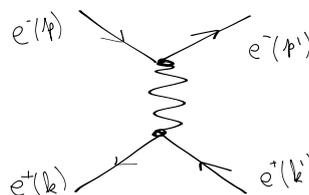


Diagrama de dispersión  
Diagrama (2)

y las ecuaciones para cada uno son

$$M_1 = \overline{u}(p') (-ie\gamma^\beta) v(k') \frac{-i\eta_{\beta\alpha}}{(p+k)^2} v(k) (-ie\gamma^\alpha) u(p)$$

$$s = (p_1 + p_2)^2 \rightarrow = ie^2 \overline{u}(p') \gamma^\beta v(k') \frac{1}{s} \overline{v}(k) \gamma_\beta u(p) \rightarrow \text{Canal } s$$

y

$$M_2 = \frac{ie^2}{t} \overline{u}(p') \gamma^\alpha u(p) \overline{v}(k) \gamma_\alpha v(k') \rightarrow \text{Canal } t$$

Ahora calculamos

$$\frac{1}{2s_1 + 1} \frac{1}{2s_2 + 1} \sum_{s_i} |M_1 + M_2|^2$$

Esta cuenta es un bajón. Vamos a calcular

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{s_i} |M_1|^2 &= \frac{1}{4} \frac{e^4}{s^2} \left( \overline{u(p')} \gamma^\mu v(k') \overline{v(k)} \gamma_\beta u(p) \right) \underbrace{\left( \overline{u(p)} \gamma_\alpha v(k) \overline{v(k')} \gamma^\alpha u(p') \right)}_{\text{Complejo conjugado}} \\ &= \frac{1}{4} \frac{e^4}{s^2} \underbrace{\left( \frac{\not{p} + m}{2m} a_1 a_2 \gamma_\alpha \frac{\not{k} - m}{2m} a_3 a_4 \gamma_\beta \right)}_{\text{tr} \left( \frac{\not{p} + m}{2m} \gamma_\alpha \frac{\not{k} + m}{2m} \gamma_\beta \right)} \times \underbrace{(\dots)}_{\text{tr} \left( \frac{\not{p} + m}{2m} \gamma_\alpha \frac{\not{k} + m}{2m} \gamma_\beta \right)} \end{aligned}$$

donde lo que está en rojo son los índices que se contraen al hacer la multiplicación matricial.

Otra forma de darse cuenta cuáles son las trazas sin recurrir a tener que anotar todos los índices es mirar los diagramas y ver cómo se van armando las trazas. Hay que hacer una cosa de reflejar los diagramas de Feynman y recorrer los loops que quedan, pero no entendí mucho.

Ahora usamos las propiedades de las trazas de las matrices de Dirac. Tenemos que

$$\begin{aligned} \text{tr} \left( \frac{\not{p} + m}{2m} \gamma_\alpha \frac{\not{k} + m}{2m} \gamma_\beta \right) &= \frac{1}{(2m)^2} \left[ p^\mu k^\nu \underbrace{\text{tr}(\gamma^\mu \gamma_\alpha \gamma^\nu \gamma_\beta)}_{4\eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} + \eta^{\mu\beta} \eta^{\alpha\nu} - \eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta}} - m^2 \underbrace{\text{tr}(\gamma_\alpha \gamma_\beta)}_{4\eta_{\alpha\beta}} \right] \\ \frac{1}{4} \sum_{s_i} |M_1|^2 &= \frac{8e^2}{s^2 (2m)^4} ((pp') (kk') + (pk') (p'k) + m^2 (k'p') + m^2 (kp) + 2m^4) \end{aligned}$$

Ahora para terminar faltaría calcular los demás términos  $|M_2|^2$  y los cruzados, creo.

Ahora tomamos el límite ultra relativista

$$m^2 \rightarrow 0 \rightarrow \text{Límite ultra relativista}$$

En el sistema centro de masa tenemos que

$$\text{Sistema centro de masa} \rightarrow \begin{cases} p^\mu = (E, \mathbf{p}) \\ k^\mu = (E, -\mathbf{p}) \\ p'^\mu = (E, \mathbf{p}') \\ k'^\mu = (E, -\mathbf{p}') \end{cases}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{e^4}{64\pi^2 2E^2} \left( \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta) + \frac{1 + \cos^4 \theta}{\text{no veo por el reflejo de las lámparas}} - 2 \frac{\cos^4 \theta/2}{\sin^2 \theta/2} \right)$$

En el límite no relativista

$$\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v} \approx m\mathbf{v}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \approx 1 + \frac{v^2}{2}$$

$$E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2$$

$$E^2 \approx m^2$$

$$E^2 - m^2 \approx m^2 v^2$$

Recordemos que el diagrama (1)  $\propto \frac{1}{s}$  y el diagrama (2)  $\propto \frac{1}{t}$ . Veamos qué ocurre con ellos en el límite no relativista:

$$\begin{aligned} s &= (p+k)^2 \\ &= 2m^2 + 2pk \\ &= 2(m^2 + E^2 + m^2 v^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}t &= (p - p')^2 \\ &= 2m^2 - 2pp' \\ &= 2m^2 - 2E^2 + m^2v^2\end{aligned}$$

Ahora no entiendo por qué pero parece que en el límite no relativista  $t \gg s$ . En este límite la amplitud de scattering es

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{e^4}{16\pi^2} \frac{1}{16v^4 \sin^4 \theta/2} \rightarrow \text{En límite no relativista}$$