Finales Resueltos de Matemática 3

Julio 2015

Nota importantísima La presente guía de finales resueltos fue escrita por un alumno con el fin de estudiar para los respectivos parciales (es decir que en lugar de hacerlos en papel, dicho alumno los hizo en la PC, solo eso). Esto es motivo suficiente para que la probabilidad de que hayan errores en procedimientos y/o resultados sea bastante elevada. De todos modos, también hay una probabilidad de que hayan cosas que estén bien, y es por ello que este alumno decidió compartir sus parciales resueltos con la comunidad. Este material no es oficial de ninguna cátedra. Aclarado esto, el alumno les desea suerte con los parciales!

Cómo se hacen estos apuntes Estos apuntes están hechos usando un programa llamado Lyx[1]. Para hacer los dibujos se usó Inkscape y después se insertó las imágenes en formato `svg`[2] directamente en Lyx sin conversión alguna. En este repositorio de GitHub se encuentra la plantilla (*template*) que Alf usa actualmente, con todo lo necesario para compilarla y empezar a divertirse.

Índice

[1] Lyx es una interfaz gráfica para Latex que hace que la escritura se vuelva extremadamente fluida y veloz (al punto de poderse tomar apuntes en vivo durante una clase).

[2] `svg` es el formato nativo de Inkscape.

1. Final del 16/03/2010

Consigna

Ejercicio 1

Sea C una curva simple, abierta y suave orientada por la parametrización regular $\sigma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, con $\sigma(0) = (0,1,0)$ y $\sigma(1) = (\pi, 2, 0)$. Calcular

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

siendo

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} \sin x + \frac{xz^2}{2} \\ \frac{\pi}{2} \cos(\pi y) + y \\ \frac{x^2 z}{2} - (z+1) e^z \end{bmatrix}$$

Ejercicio 2

Enunciar y demostrar el teorema de Gauss o de la divergencia para una región elemental en $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 3

- Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto, $a_{ij} : I \to \mathbb{R}$ continuas y $\mathscr{A}(t) = a_{ij}(t) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Sean $\vec{x}_1$ y $\vec{x}_2$ dos soluciones del sistema lineal homogéneo

  $$\vec{x}' = \mathscr{A}(t)\vec{x}$$

  Sea $\tau \in I$ cualquiera. Probar que $\vec{x}_1$ y $\vec{x}_2$ son linealmente independientes como funciones de t en $I \iff$ los vectores $\vec{x}_1(\tau)$ y $\vec{x}_2(\tau)$ son linealmente independientes en $\mathbb{R}^2$.

- Encontrar la solución general y esbozar el diagrama de fases correspondiente cuando

  $$\mathscr{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Resolución

Ejercicio 1

Claramente $\vec{F}$ es un campo conservativo y entonces $\exists f$ tq $\vec{F} = \vec{\nabla} f$ de forma que

$$\int\limits_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = f(\sigma(1)) - f(\sigma(0))$$

Para probar que $\vec{F}$ es conservativo se le puede calcular el rotor y confirmar que es nulo, pero me da mucha fiaca, así que voy a ir de una a buscar a f. A ojo propongo

$$f = -\cos x + \frac{x^2 z^2}{4} + \frac{1}{2}\cos(\pi y) + y - z e^z$$

y resulta que funciona ✓. Listo, ahora es hacer la cuentita.

Ejercicio 2

Ya lo hice en el final del 24/02/2012.

Ejercicio 3

Primera parte

Para la primera parte me baso en lo que dice el apunte oficial del Departamento de Matemática, en particular en la proposición 3.1 del apunte de ODE.

Supongamos que $\{\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_n(t)\}$ son soluciones de $\vec{x}' = \mathscr{A}(t)\vec{x}$. Supongamos además que $\vec{y}(t) = c_1\vec{x}_1(t) + \cdots + c_n\vec{x}_n(t) \equiv \vec{0}$ es la función cero. Si asumimos que $\{\vec{x}_1(\tau), \dots, \vec{x}_n(\tau)\}$ son linealmente independientes, entonces necesariamente $c_i = 0$ ya que al evaluar $\vec{y}(\tau)$ obtenemos

$$\vec{y}(\tau) = c_1\vec{x}_1(\tau) + \cdots + c_n\vec{x}_n(\tau) = 0 \iff c_i = 0$$

De esta forma hemos probado que si $\{\vec{x}_1(\tau), \dots, \vec{x}_n(\tau)\}$ son linealmente independientes como vectores $\Rightarrow \{\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_n(t)\}$ son linealmente independientes como funciones.

Ahora probamos la otra dirección. Para ello asumamos que $\{\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_n(t)\}$ son linealmente independientes como funciones. Sea $\vec{y}(t) = c_1\vec{x}_1(t) + \cdots + c_n\vec{x}_n(t)$ una solución de $\vec{x}' = \mathscr{A}(t)\vec{x}$ con dato inicial $\vec{y}(\tau) = \vec{0}$. Por el teorema de unicidad de solución entonces $\vec{y} \equiv \vec{0}$ por lo que

$$\vec{y}(t) = c_1\vec{x}_1(t) + \cdots + c_n\vec{x}_n(t)\, \forall t \in I \iff c_i = 0$$

lo cual implica que $c_1\vec{x}_1(\tau) + \cdots + c_n\vec{x}_n(\tau) = 0 \iff c_i = 0$. De esta forma se ha probado que si $\{\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_n(t)\}$ son linealmente independientes como funciones $\Rightarrow \{\vec{x}_1(\tau), \dots, \vec{x}_n(\tau)\}$ son linealmente independientes como vectores.

Para concluir, uniendo las dos demostraciones se obtiene que $\{\vec{x}_1(\tau), \dots, \vec{x}_n(\tau)\}$ son linealmente independientes como vectores $\iff \{\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_n(t)\}$ son linealmente independientes como funciones.

Segunda parte

Para resolver el sistema homogéneo $\vec{x}' = \mathscr{A}\vec{x}$ con $\mathscr{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$ proponemos como solución $\vec{x}(t) = \vec{\xi} e^{\lambda t}$. Si se introduce esto en la ecuación se obtiene

$$\begin{aligned} \vec{x}' &= \mathscr{A}\vec{x} \\ \vec{\xi}\lambda e^{\lambda t} &= \mathscr{A}\vec{\xi} e^{\lambda t} \\ \lambda\vec{\xi} &= \mathscr{A}\vec{\xi} \end{aligned}$$

Por lo tanto λ es un autovalor de $\mathscr{A}$ y $\vec{\xi}$ su autovector asociado. Los autovalores de $\mathscr{A}$ se obtienen según

$$\begin{aligned} \det(\mathscr{A} - \lambda\mathscr{I}) &= \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -4 & -\lambda \end{bmatrix} \\ &= \lambda^2 + 4 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2i \\ \lambda_2 = -2i \end{cases}$$

Para hallar los autoespacios asociados a cada autovalor hacemos

$$\begin{aligned} S_{\lambda=2i} &= \mathrm{Nu}\left(\mathscr{A} - \lambda \mathscr{I}\right) \\ &= \mathrm{Nu}\begin{pmatrix} -2i & 1 \\ -4 & -2i \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{Nu}\begin{pmatrix} 2i & -1 \\ 2i & -1 \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{\lambda=-2i} &= \mathrm{Nu}\begin{pmatrix} 2i & 1 \\ -4 & 2i \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{Nu}\begin{pmatrix} 2i & 1 \\ 2i & 1 \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{gen}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 2i \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Finalmente todas las soluciones del problema son

$$\vec{x}_{\text{total}} = c_1 e^{2it} \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix} + c_2 e^{-2it} \begin{bmatrix} -1 \\ 2i \end{bmatrix}$$

Sin embargo, como en esta materia aún no vimos números complejos, nos quedaremos solamente con las soluciones reales. Es decir que nos interesarán

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \mathrm{Re}\left(\vec{x}_{\text{total}}\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(c_1 e^{2it} \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix} + c_2 e^{-2it} \begin{bmatrix} -1 \\ 2i \end{bmatrix} \right) \\ &= c_1 \mathrm{Re}\left(e^{i2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix} \right) + c_2 \mathrm{Re}\left(e^{-i2t} \begin{bmatrix} -1 \\ 2i \end{bmatrix} \right) \\ &= c_1 \mathrm{Re}\left(\begin{bmatrix} \cos 2t + i \sin 2t \\ 2i \cos 2t - 2 \sin 2t \end{bmatrix} \right) + c_2 \mathrm{Re}\left(\begin{bmatrix} -\cos 2t + i \sin 2t \\ 2i \cos 2t - 2 \sin 2t \end{bmatrix} \right) \\ &= c_1 \begin{bmatrix} \cos 2t \\ -2 \sin 2t \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -\cos 2t \\ -2 \sin 2t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

El diagrama de fases son elipses con el semieje en y dos veces más grande que en x y según c_1 y c_2 creo que giran hacia un lado o hacia el otro. No se, no me termina de convencer igual, creo que hice algo mal. Espero que no me tomen uno igual a este.

2. Final del 10/11/2010

Consigna

Ejercicio 1

Sea S una superficie suave y $T : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una parametrización regular de S. Sea $\tilde{T} : \tilde{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una reparametrización de T. Sea $f : S \to \mathbb{R}$ una función continua. Demostrar que el cálculo de $\int_S f\, ds$ da el mismo resultado cuando se utiliza la parametrización T o la parametrización $\tilde{T}$.

Ejercicio 2

- Demostrar que si $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, un campo de clase C^1 en todo $\mathbb{R}^3$ tal que $\operatorname{rot}\left(\vec{F}\right) = 0$ en $\mathbb{R}^3$, entonces existe una función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de clase C^2 tal que $\vec{F} = \operatorname{grad}(f)$ en $\mathbb{R}^3$.
- Dado $\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$, verificar que $\operatorname{rot}\left(\vec{F}\right) = 0$ en el subconjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ definido como $\Omega = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } (x, y$
  ¿Es cierto que $\vec{F} = \operatorname{grad}(f)$ en Ω para alguna función $f \in C^2(\Omega)$?

Ejercicio 3

- Probar que la solución general de la ecuación
  $$y'' + ay' + by = f(x)$$
  con a y b constantes tiene la forma
  $$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$
  donde y_p es una solución particular y y_h es la solución general de la ecuación homogénea asociada.
- Determinar la solución general de la ecuación
  $$y'' - 2y' + y = x$$

Resolución

Ejercicio 1

Dado que

$$\iint\limits_{S} f\,ds = \iint\limits_{\mathbb{X}} f\left(T(x_1,x_2)\right) ||T_{x_1}\times T_{x_2}||\,dx_1\,dx_2 \qquad\qquad T(x_1,x_2):\mathbb{X}\to S$$

lo que se quiere probar es que no importa cuál sea T, siempre y cuando sea regular. Para ello definimos una reparametrización según

$$\tilde{T}(y_1,y_2) \stackrel{\text{def}}{=} T\left(G(y_1,y_2)\right)$$

donde $G:\mathbb{Y}\to\mathbb{X}$ con $\mathbb{X},\mathbb{Y}\subseteq\mathbb{R}$. La función G es, en su dominio de definición, una función biyectiva de clase C^1 y con $\det DG\neq 0$ para todo $(y_1,y_2)\in\mathbb{Y}$. Dado que $\tilde{T}$ es una reparametrización, si T es regular entonces $\tilde{T}$ también es regular. Si utilizamos esta segunda parametrización regular entonces la integral se escribe

$$\iint\limits_{S} f\,ds = \iint\limits_{\mathbb{Y}} f\left(\tilde{T}(y_1,y_2)\right) \left|\left|\tilde{T}_{y_1}\times\tilde{T}_{y_2}\right|\right|\,dy_1\,dy_2$$

Como $\tilde{T}(y_1,y_2) = (T\circ G)(y_1,y_2)$ entonces sabemos que

$$\left|\left|\tilde{T}_{y_1}\rfloor_{(y_1,y_2)}\times\tilde{T}_{y_2}\rfloor_{(y_1,y_2)}\right|\right| = \left|\left|T_{x_1}\rfloor_{G(y_1,y_2)}\times T_{x_2}\rfloor_{G(y_1,y_2)}\right|\right|\left|\det DG\rfloor_{(y_1,y_2)}\right|$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{S} f\,ds &= \iint\limits_{\mathbb{Y}} f\left(\tilde{T}(y_1,y_2)\right)\left|\left|\tilde{T}_{y_1}\times\tilde{T}_{y_2}\right|\right|\,dy_1\,dy_2\\
&= \iint\limits_{\mathbb{Y}} f\left(\tilde{T}(y_1,y_2)\right)\left|\left|T_{x_1}\rfloor_{G(y_1,y_2)}\times T_{x_2}\rfloor_{G(y_1,y_2)}\right|\right|\left|\det DG\rfloor_{(y_1,y_2)}\right|\,dy_1\,dy_2\\
&= \iint\limits_{\mathbb{Y}} f\left(T\left(G(y_1,y_2)\right)\right)\left|\left|T_{x_1}\rfloor_{G(y_1,y_2)}\times T_{x_2}\rfloor_{G(y_1,y_2)}\right|\right|\left|\det DG\rfloor_{(y_1,y_2)}\right|\,dy_1\,dy_2
\end{aligned}$$

Ahora se aplica el teorema de cambio de variables en integrales dobles que dice

Teorema (**cambio de variables en integrales**). Sean A y B son abiertos de $\mathbb{R}^n$, sea el campo $f:A\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ y sea G una biyección clase C^1 definida $G:B\to A$. Entonces

$$\int\limits_{A} f = \int\limits_{B} (f\circ G)\,|\det DG\,|$$

donde DG es el diferencial de G (matriz jacobiana).

Para aplicar el teorema vamos desde B hacia A, es decir que $\mathbb{Y}\equiv B$ y $\mathbb{X}\equiv A$ en el teorema. Es evidente entonces que

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{S} f\,ds &= \iint\limits_{\mathbb{Y}} f\left(T\left(G(y_1,y_2)\right)\right)\left|\left|T_{x_1}\rfloor_{G(y_1,y_2)}\times T_{x_2}\rfloor_{G(y_1,y_2)}\right|\right|\left|\det DG\rfloor_{(y_1,y_2)}\right|\,dy_1\,dy_2\\
\text{aplico teorema}\to &= \iint\limits_{\mathbb{X}} f\left(T(x_1,x_2)\right)\left|\left|T_{x_1}\rfloor_{(x_1,x_2)}\times T_{x_2}\rfloor_{(x_1,x_2)}\right|\right|\,dx_1\,dx_2 \qquad\qquad \checkmark
\end{aligned}$$

Listo, se ha probado que es lo mismo utilizar una u otra parametrización (regulares ambas).

Ejercicio 2

Primera parte

Voy a seguir el camino del Marsden Tromba. Tenemos el teorema que dice:

Teorema Sea $\vec{F}$ un campo vectorial C^1 definido en $\mathbb{R}^3$ excepto, quizás, en un número finito de puntos. Las siguientes condiciones sobre $\vec{F}$ son equivalentes

(i) Para cualquier curva cerrada simple orientada C, $\int_C \vec{F} \cdot \vec{ds} = 0$.

(ii) Para cualesquiera dos curvas cerradas simples orientadas C_1 y C_2 que tengan los mismos extremos

$$\int\limits_{C_1} \vec{F} \cdot \vec{ds} = \int\limits_{C_2} \vec{F} \cdot \vec{ds}$$

(iii) $\vec{F}$ es el gradiente de alguna función f, y si $\vec{F}$ tiene un punto donde no está definida, entonces tampoco lo estará f ahí.

(iv) $\operatorname{rot}\left(\vec{F}\right) = 0$.

Para la demostración del teorema (y del ejercicio) se puede proceder con una demostración cíclica, es decir (i)$\Rightarrow$(ii)$\Rightarrow$(iii)$\Rightarrow$(iv)$\Rightarrow$(i). Entonces cualquiera de las condiciones que se cumplan, implica las demás.

Asumamos que (i) es verdadera y veamos que también se cumple (ii). Supongamos la curva cerrada y simple C tal que

$$\int\limits_{C} \vec{F} \cdot \vec{d\ell} = 0$$

Ahora supongamos que $C = C_1 \cup C_2$ con C_1 y C_2 dos curvas abiertas y simples tales que las recorremos con la orientación que les induce C. Entonces

$$\int\limits_{C} \vec{F} \cdot \vec{d\ell} = \int\limits_{C_1} \vec{F} \cdot \vec{d\ell} + \int\limits_{C_2} \vec{F} \cdot \vec{d\ell} = 0$$

Esto implica que

$$\int\limits_{C_1} \vec{F} \cdot \vec{d\ell} = -\int\limits_{C_2} \vec{F} \cdot \vec{d\ell}$$

Si ahora invertimos el sentido de una de las curvas, de modo tal que ambas empiecen en el mismo punto y terminen en otro punto (el mismo para ambas) entonces cambiará el signo de una de las integrales y se obtendrá

$$\int\limits_{C_1^+} \vec{F} \cdot \vec{d\ell} = \int\limits_{C_2^-} \vec{F} \cdot \vec{d\ell}$$

donde C_1^+ es la curva C_1 recorrida con la orientación que le induce C y C_2^- es la curva C_2 recorrida con la orientación inversa. Como C_1 y C_2 son dos curvas cualesquiera tales que $C_1 \cup C_2$ sea una curva cerrada simple, entonces se demuestra que $\int \vec{F} \cdot \vec{d\ell}$ es independiente del camino, por lo que

$$\boxed{\text{(i)} \Rightarrow \text{(ii)}}\checkmark$$

Ahora veamos que (ii) implica a (iii). Para ello consideremos una curva C que une los puntos $\boldsymbol{p}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ con $\boldsymbol{p} = (x, y, z)$. Definimos

$$f(x, y, z) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{C} \vec{F} \cdot \vec{d\ell}$$

y, dado que $\int_C \vec{F} \cdot \vec{d\ell}$ no depende de C si no únicamente de los puntos que ésta curva une, en particular se puede elegir C como fragmentos rectos y paralelos a los ejes como se muestra en la figura 1. De esta forma se puede expresar a f separando la integral en tres partes

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \int\limits_{C} \vec{F} \cdot \vec{d\ell} \\ &= \int\limits_{x_0}^{x} F_1(t, y_0, z_0)\, dt + \int\limits_{y_0}^{y} F_2(x, t, z_0)\, dt + \int\limits_{z_0}^{z} F_3(x, y, t)\, dt \end{aligned}$$

Es inmediato que

$$\frac{\partial f}{\partial z} = F_3(x, y, z)$$

y permutando el orden en que se arma la curva se puede obtener de la misma forma

$$\frac{\partial f}{\partial x} = F_1(x, y, z) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = F_2(x, y, z)$$

de modo que $\operatorname{grad}(f) = \vec{F}$. Esto demuestra que

$$\boxed{\text{(ii)} \Rightarrow \text{(iii)}}\checkmark$$

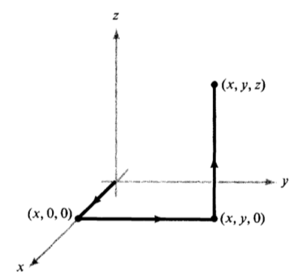

Figura 1: Trayectoria que une los dos puntos (tomado de Marsden Tromba).

El siguiente paso, es decir (iii)⇒(iv) es cuasi trivial. No es más que plantear que $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}(f)) = 0$ y como $f \in C^2$ esto es una identidad por la igualdad de las derivadas cruzadas. Por lo tanto

$$\boxed{\text{(iii)} \Rightarrow \text{(iv)}}\checkmark$$

Para concluir necesitamos probar que (iv) implica a (i), es decir que $\operatorname{rot}\left(\vec{F}\right) = \vec{0} \Rightarrow \oint_C \vec{F} \cdot \vec{d\ell} = 0$. Esto es directo si se considera el teorema de Stokes que dice que

$$\oint\limits_{C^+} \vec{F} \cdot \vec{d\ell} = \int\limits_{S^+} \operatorname{rot}\left(\vec{F}\right) \cdot \vec{ds}$$

donde C^+ y S^+ son la curva y la superficie cuyo contorno es la curva recorridas con el sentido correcto que pide el teorema. Es directo que si $\operatorname{rot}\left(\vec{F}\right) = \vec{0}$ entonces toda la integral se anula y

$$\boxed{\text{(iv)} \Rightarrow \text{(i)}}\checkmark$$

Listo. Si se parte de (iv) se puede llegar a (iii), que es lo que pide la consigna.

Segunda parte

El rotor del campo es

$$\operatorname{rot}\left(\vec{F}\right) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_2}{\partial x_3} - \dfrac{\partial F_3}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial F_3}{\partial x_1} - \dfrac{\partial F_1}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2} - \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1} \end{bmatrix}$$

por lo que si $\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$ entonces

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_i}{\partial x_3} = \dfrac{\partial F_i}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial F_3}{\partial x_i} = 0 \end{cases} \qquad i \in \{1, 2, 3\}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_2}{\partial x_1} &= \frac{\partial F_2}{\partial x} \\ &= \frac{1}{x^2+y^2} + \frac{x\,(-1)\,2x}{\left(x^2+y^2\right)^2} \\ &= \frac{1}{x^2+y^2} + \frac{-2x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_2} &= \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ &= \frac{-1}{x^2+y^2} + \frac{2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\end{aligned}$$

Las dos primeras componentes de rot $\left(\vec{F}\right)$ son nulas a simple vista ya que son de la forma "$0-0$". La tercera componente es

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_1}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_1} &= \frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial x} \\ &= \frac{-1}{x^2+y^2} + \frac{2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} - \left(\frac{1}{x^2+y^2} + \frac{-2x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right) \\ &= \frac{-2}{x^2+y^2} + \frac{2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\left(y^2+x^2\right) \\ &= 0 \qquad \checkmark\end{aligned}$$

A pesar de que rot $\left(\vec{F}\right) \equiv 0 \forall (x,y) \neq (0,0) \nexists f$ tq grad $(f) = \vec{F}$ porque $\Omega \neq \mathbb{R}^3 - \{p_0, \ldots, p_N\}$ con $N < \infty$ (teorema de la clase teórica).

Ejercicio 3

Primera parte

Por lo visto en clase sabemos que hay una biyección entre las ecuaciones lineales de orden dos y los sistemas lineales de dimensión dos de primer orden, es decir

$$y'' + ay' + by = f(x) \longleftrightarrow \vec{y}' = \mathscr{A}\vec{y} + \vec{f}$$

donde

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix} \qquad \mathscr{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix} \qquad \vec{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ f(x) \end{bmatrix}$$

Esto nos dice que si $y(x)$ es solución de la ecuación de segundo orden, entonces $\vec{y}$ es solución del sistema de primer orden por lo que cualquier cosa que se prueba en un lado automáticamente tiene su recíproco en el otro lado.

Ahora nos basamos en lo que dice el apunte de ecuaciones diferenciales de la página del departamento (teorema 3.3): sea $\vec{y}_p$ una solución particular del sistema $\vec{y}' = \mathscr{A}\vec{y} + \vec{f}$ y sea $\vec{y}$ otra solución. Sea $\vec{y}_h = \vec{y} - \vec{y}_p$, entonces

$$\vec{y}_h' = \vec{y}' - \vec{y}_p'$$

Como $\vec{y}$ es solución del sistema entonces $\vec{y}' = \mathscr{A}\vec{y} + \vec{f}$, y lo mismo para $\vec{y}_p$. Entonces

$$\begin{aligned}\vec{y}_h' &= \vec{y}' - \vec{y}_p' \\ &= \mathscr{A}\vec{y} + \vec{f} - \left(\mathscr{A}\vec{y}_p + \vec{f}\right) \\ &= \mathscr{A}\left(\vec{y} - \vec{y}_p\right) \\ &= \mathscr{A}\vec{y}_h\end{aligned}$$

por lo tanto $\vec{y}_h$ es una solución del homogéneo asociado. Sea ahora $\vec{x}_2 = \vec{y}_p + \vec{y}_h$. Con el mismo procedimiento se obtiene

$$\begin{aligned}\vec{x}_2' &= \vec{y}_p' + \vec{y}_h \\ &= \mathscr{A}\vec{y}_p + \vec{f} + \mathscr{A}\vec{y}_h \\ &= \mathscr{A}\left(\vec{y}_p + \vec{y}_h\right) + \vec{f} \\ &= \mathscr{A}\vec{x}_2 + \vec{f}\end{aligned}$$

por lo que $\vec{x}_2$ es solución del sistema.

Dado que este teorema se cumple para todas las componentes de cada vector solución, en particular lo hace para la primera componente y esto es la prueba para la ecuación lineal de orden 2.

Segunda parte

Sabemos que las solución y es $y(x) = y_p(x) + y_h(x)$. Determinamos primero y_h y luego y_p mediante variación de las constantes. La función y_h es solución de la ecuación

$$y_h'' - 2y_h' + y_h = 0$$

por lo tanto proponemos $y_h = e^{\lambda x}$ y al introducirla en la ecuación se obtiene

$$e^{\lambda x}\left(\lambda^2 - 2\lambda + 1\right) = 0 \iff \lambda \text{ es raíz del polinomio}$$

Las raíces de dicho polinomio son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 1$. En este caso sabemos que

$$y_h(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x$$

Ahora realizamos el método de variación de las constantes que nos dice que

$$y_p(x) = f_1(x) e^x + f_2(x) x e^x$$

donde f_1 y f_2 verifican

$$\mathscr{W}\left[e^x, xe^x\right] \frac{d}{dx}\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \vec{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix}$$

con

$$\mathscr{W}\left[e^x, xe^x\right] = \begin{bmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x + xe^x \end{bmatrix}$$

la matriz wronskiana. Resolvemos el sistema entonces

$$\left[\begin{array}{cc|c} e^x & xe^x & 0 \\ e^x & e^x(x+1) & x \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} e^x & xe^x & 0 \\ 0 & e^x & x \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow f_2'(x) = xe^{-x} \Rightarrow f_1'(x) = -x^2 e^{-x}$$

Integrando por partes se obtiene

$$\begin{cases} f_1(x) = -e^{-x}\left(x^2 + 2x + 2\right) \\ f_2(x) = -e^{-x}(x+1) \end{cases}$$

por lo que finalmente

$$y_p(x) = -\left(x^2 + 2x + 2\right) - x(x+1)$$

La solución general será, como se dijo más arriba, $y = y_h + y_p$.

3. Final del 10/09/2014

Consigna

Ejercicio 1

Usar el teorema de Green para probar el Teorema de Gauss en $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio 2

1. Demostrar que si $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es un campo C^1 en todo $\mathbb{R}^3$ tal que $\operatorname{rot}\left(\vec{F}\right) = \vec{0}$ en todo $\mathbb{R}^3$, entonces existe una función $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ que es C^2 tal que $\vec{F} = \operatorname{grad}(\phi)$.
2. Dado $\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$, verificar que $\operatorname{rot}\left(\vec{F}\right) = 0$ en el subconjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ definido como $\Omega = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } (x, y$
   ¿Es cierto que $\vec{F} = \operatorname{grad}(f)$ en Ω para alguna función $f \in C^2(\Omega)$?

Ejercicio 3

Dado el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y'(t) = |\, y(t)\,|^{\alpha} \\ y(0) = 0 \\ \alpha > 0 \end{cases}$$

¿Para qué valores de α puede asegurarse que $y_0(t) \equiv 0$ es la única solución de este problema? (Para aquellos valores de α donde esto no se cumpla, exhiba al menos alguna otra solución).

Ejercicio 4

Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ sea el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -3 & \alpha \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Hallar todos los valores de α tales que toda solución $\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ cumpla

$$\lim_{t \to +\infty} \vec{x}(t) = \vec{0}$$

Resolución

Ejercicio 1

En mi curso no vimos el "teorema de Gauss en $\mathbb{R}^2$". Supongo que será el siguiente

Teorema (Gauss en $\mathbb{R}^2$). Sea $\vec{F} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo C^1 con D una región "linda". Entonces

$$\oint\limits_{\partial D} \vec{F} \cdot \hat{\eta} \, d\ell = \iint\limits_{D} \operatorname{div}\left(\vec{F}\right) \, ds$$

donde $\hat{\eta}$ es un versor normal a ∂D y $\operatorname{div}\left(\vec{F}\right) = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2}$.

Entonces, sea

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{bmatrix}$$

y sea $\sigma : [a,b] \to \partial D$ siendo $\sigma(t) = (x(t), y(t))$ una parametrización regular de ∂D con orientación positiva. El campo de versores normales a ∂D lo podemos obtener según

$$\hat{\eta}(t) = \frac{1}{||\sigma'(t)||} \begin{bmatrix} \sigma_2'(t) \\ -\sigma_1'(t) \end{bmatrix}$$

y, de la definición de integral de un campo escalar sobre una curva tenemos que

$$d\ell = ||\sigma'(t)|| \, dt$$

por lo que

$$\oint\limits_{\partial D} \vec{F} \cdot \hat{\eta} \, d\ell = \int\limits_a^b \begin{bmatrix} P(\sigma(t)) \\ Q(\sigma(t)) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_2'(t) \\ -\sigma_1'(t) \end{bmatrix} \frac{1}{\cancel{||\sigma'(t)||}} \cancel{||\sigma'(t)||} \, dt$$

Si escribimos a $\sigma(t) = (\sigma_1(t), \sigma_2(t)) = (x(t), y(t))$ entonces

$$\begin{aligned} \oint\limits_{\partial D} \vec{F} \cdot \hat{\eta} \, d\ell &= \int\limits_a^b \begin{bmatrix} P(\sigma(t)) \\ Q(\sigma(t)) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_2'(t) \\ -\sigma_1'(t) \end{bmatrix} dt \\ &= \int\limits_a^b \left[P(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt} - Q(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt} \right] dt \\ &= \int\limits_{\partial D} P \, dy - Q \, dx \end{aligned}$$

Preguntar De acá no se bien cómo seguir... Saqué todo de acá: «http://fcm.ens.uabc.mx/~chelo/analisis%20vectorial/nucleos/capitulo5

Ejercicio 2

Ya lo hice en el final del día 10/11/2010.

Ejercicio 3

No tengo idea ni cómo encararlo... Preguntar

Ejercicio 4

Dado que este sistema es homogéneo, las soluciones serán alguno de los siguientes casos

$$\vec{x}(t) = \begin{cases} \begin{cases} \vec{\xi}_1 e^{\lambda_1 t} + \vec{\xi}_2 e^{\lambda_2 t} \\ \vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2 \text{ son los autovectores de } \mathscr{A} \end{cases} & \text{cuando } \mathscr{A} \text{ es diagonalizable} \\ \begin{cases} \vec{\xi}_1 e^{\lambda_1 t} + \left(\vec{\xi}_1 t + \vec{\xi}_2\right) e^{\lambda_1 t} \\ \vec{\xi}_1 \text{ es autovector} \\ \vec{\xi}_2 \text{ satisface } (\mathscr{A} - \lambda_1 \mathscr{I}) \vec{\xi}_2 = \vec{\xi}_1 \end{cases} & \text{cuando } \mathscr{A} \text{ no es diagonalizable} \end{cases}$$

En el caso en que λ_1 y λ_2 sean complejos no importa, sirve igual (el primer caso) salvo que descartamos las soluciones complejas. Es evidente entonces que

$$\lim_{t \to +\infty} \vec{x}(t) = \vec{0} \iff \operatorname{Re}(\lambda_1), \operatorname{Re}(\lambda_2) < 0$$

Por lo tanto buscamos los autovalores de la matriz

$$\begin{aligned} \det(\mathscr{A} - \lambda \mathscr{I}) &= (-3-\lambda)(1-\lambda) - 2\alpha \\ &= \lambda^2 + 2\lambda - 3 - 2\alpha \end{aligned}$$

cuyas raíces son

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(-3-2\alpha)}}{2} \\ &= -1 \pm \frac{\sqrt{16 + 8\alpha}}{2} \\ &= -1 \pm \frac{\sqrt{8}\sqrt{2+\alpha}}{2} \\ &= -1 \pm \sqrt{2}\sqrt{2+\alpha} \end{aligned}$$

Si $\alpha < -2 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{R}$ y además $\operatorname{Re}(\lambda_{1,2}) = -1 < 0 \Rightarrow$ se cumple lo que pide la consigna. Si $\alpha \geq -2$ debemos pedir que

$$\sqrt{2}\sqrt{2+\alpha} < 1 \to \text{despejar } \alpha$$

Listo.

4. Final del 22/07/2013

Consigna

Ejercicio 1

Mostrar funciones $P, Q : \mathbb{R}^2 - \{(1,2)\} \to \mathbb{R}$ de clase C^1 que verifican $P_y = Q_x$ pero que

$$\oint_\gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \neq 0$$

donde $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ con $t \in [0, 2\pi]$.

Ejercicio 2

Dadas $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2, probar que para todo $D \subset \mathbb{R}^2$ abierto y acotado

$$\oint_{\partial D} (f\nabla g - g\nabla f)\,.n\,d\ell = \int_D (f\Delta g - g\Delta f)\;dx\,dy$$

Ejercicio 3

Hallar la solución general $x(t) \in \mathbb{R}^3$ del problema

$$x'(t) = \Omega \times x(t)$$

donde $\Omega \in \mathbb{R}^3$ ($\times$ indica producto vectorial).

Ejercicio 4

Hallar los puntos estacionarios del sistema

$$\begin{cases} x'(t) = x\,(2 - x - y) \\ y'(t) = y\,(-1 + x - y) \end{cases}$$

y clasificarlos como estables o inestables.

Resolución

Ejercicio 1

Sea $\vec{F} : \mathbb{R}^2 - \{(1,2)\} \to \mathbb{R}^2$ con $\vec{F}(x,y) = \begin{bmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{bmatrix}$ y $\vec{F} \in C^1$ en todo su dominio. Entonces, por el teorema de Green,

$$\int\limits_{C^+} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{C^+} \vec{F} \cdot \vec{d\ell} = \iint\limits_{D} (Q_x - P_y)\,dx\,dy$$

donde C^+ está dada por la parametrización $\gamma(t)$ de la consigna y D es la región interior (el círculo unitario). Esto es válido ya que $\vec{F} \in C^1$ en D y en C^+. Esto implica que si $Q_x = P_y$ entonces $\int_{C^+} P\,dx + Q\,dy = 0$, por lo que la respuesta del ejercicio pareciera ser un conjunto vacío (o sea, no hay funciones que cumplan todo lo que se pide). Me parece que hay algún error de enunciado, como que el punto que se quita del dominio de $\vec{F}$ debería ser uno interior a la región encerrada por la curva γ. En dicho caso el teorema de Green no sería valido y sí se podrían encontrar campos que cumplan con dichas condiciones. Preguntar

Ejercicio 3

Si denotamos $\Omega = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}$ entonces

$$\begin{aligned} \Omega \times \vec{x}(t) &= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \omega_2 x_3 - \omega_3 x_2 \\ \omega_3 x_1 - \omega_1 x_3 \\ \omega_1 x_2 - \omega_2 x_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

lo que matricialmente se puede expresar según

$$\Omega \times \vec{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathscr{M}} \vec{x}$$

Por lo tanto el problema resulta ser un sistema lineal de primer orden a coeficientes constantes

$$\vec{x}'(t) = \mathscr{M}\vec{x}(t)$$

Para resolverlo proponemos $\vec{x}(t) = \vec{\xi} e^{\lambda t}$ y buscamos los autovalores y autovectores de $\mathscr{M}$. Entonces

$$\begin{aligned} \det(\mathscr{M} - \lambda\mathscr{I}) &= \det \begin{bmatrix} -\lambda & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & -\lambda & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & -\lambda \end{bmatrix} \\ &= -\lambda^3 + 2\omega_1\omega_2\omega_3 - \left(\omega_2^2\lambda + \omega_3^2\lambda + \omega_1^2\lambda\right) \\ &= -\lambda^3 - \lambda\left(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2\right) + 2\omega_1\omega_2\omega_3 \\ &= ? \end{aligned}$$

Debe haber algún truco/propiedad que no conozco... Preguntar

Encontré una propiedad que dice que

$$\sum \lambda_i = \operatorname{tr}(\mathscr{M})$$

y en este caso $\operatorname{tr}(\mathscr{M}) = 0$. Además, dado que los coeficientes del polinomio son reales entonces dos autovalores serán pares conjugados y uno será real. Esto implica que, en el plano complejo, los tres autovalores aparecerán contenidos en una circunferencia, o dicho de otra forma $|\lambda_1| = |\lambda_2| = |\lambda_3|$.

La intuición me dice que las trayectorias descriptas por una partícula que cumple esta ecuación diferencial son circunferencias centradas en el origen y contenidas en el plano perpendicular a Ω.

Ejercicio 4

Los puntos de equilibrio (estacionarios) $\vec{x}_i$ del sistema $\vec{x}' = \vec{F}(\vec{x})$ son aquellos puntos en que $\vec{F}(\vec{x}_i) = \vec{0}$. Planteamos entonces

$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{bmatrix} x(2-x-y) \\ y(-1+x-y) \end{bmatrix} = 0$$

El primer punto evidente es $\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Para hallar otros puntos de equilibrio pedimos

$$\begin{cases} 2-x-y=0 \\ -1+x-y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ x-y=1 \end{cases} \Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

por lo tanto

$$\text{Puntos de equilibrio} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \right\}$$

Un punto de equilibrio será inestable si las soluciones que pasan cerca de dicho punto se alejan cuando $t \to \infty$. Para analizar lo que sucede en un entorno de un punto de equilibrio utilizamos el teorema de estabilidad lineal que dice que

Teorema (**estabilidad lineal**). Si $D\vec{F}(\vec{x}_0)$ tiene autovalores

1. Todos con parte real negativa: entonces $\vec{x}_0$ es un punto de equilibrio estable.
2. Todos con parte real positiva: entonces $\vec{x}_0$ es un punto de equilibrio inestable.
3. Existe uno con parte real positiva y otro con parte real negativa: entonces $\vec{x}_0$ es inestable.
4. Todos los autovalores tienen parte real nula: no sirve el teorema, no se puede decir nada.

Entonces

$$D\vec{F}(\vec{x}) = \begin{bmatrix} -2x+2-y & -x \\ y & -2y-1+x \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} D\vec{F}\Big|_{\vec{x}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ D\vec{F}\Big|_{\vec{x}=\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{cases}$$

Buscamos los autovalores en cada punto

$$\begin{aligned} \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \lambda \mathscr{I} \right) &= \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (2-\lambda)(-1-\lambda) \Rightarrow \lambda_{1,2} = \{2, -1\} \end{aligned}$$

Según el teorema de estabilidad lineal, este es un punto de equilibrio inestable.

Para el otro punto tenemos

$$\begin{aligned} \det\left(\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} - \lambda \mathscr{I} \right) &= \left(-\frac{3}{2} - \lambda\right)\left(-\frac{1}{2} - \lambda\right) + \frac{3}{8} \\ &= \lambda^2 + 2\lambda + \frac{3}{4} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{-3}{2} \right\} \end{aligned}$$

por o que es un punto de equilibrio estable.

5. Final del 24/02/2012

Consigna

Ejercicio 1

Enunciar y demostrar el Teorema de Gauss o de la divergencia.

Ejercicio 2

Sean $P_0, P_1 \in \mathbb{R}^3$. Probar que la integral curvilínea del campo

$$\vec{F}(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2x\sin y + ze^y \\ x^2\cos y + xze^y \\ xe^y + z \end{bmatrix}$$

no depende de la curva simple suave de extremos P_0 y P_1 orientada de P_0 a P_1.

Ejercicio 3

Sea $\mathscr{A}(t)$ una matriz de 2×2 a coeficientes continuos para t perteneciendo a cierto intervalo I. Probar que el conjunto de soluciones del sistema

$$\vec{x}' = \mathscr{A}(t)\vec{x} \qquad \vec{x}(t) \in \mathbb{R}^2$$

es un espacio vectorial de dimensión 2.

Ejercicio 4

Dado el sistema

$$\begin{cases} x' = xe^{y-3} \\ y' = 2\sin x + 3 - y \end{cases}$$

- Hallar todos los puntos de equilibrio del sistema y decir si son estables.
- Cerca de cada punto de equilibrio esbozar el diagrama de fases correspondiente.

Resolución

Ejercicio 1

Teorema (de Gauss o de la divergencia). Sea $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 con Ω una región elemental de tipo IV. Entonces

$$\iint\limits_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{ds} = \iiint\limits_{\Omega} \operatorname{div}\left(\vec{F}\right) dx\, dy\, dz$$

Vamos a demostrarlo según lo hace nuestro buen amigo Marsden & Tromba. Para ello descomponemos al campo $\vec{F}$ según

$$\vec{F} = P\hat{x} + Q\hat{y} + R\hat{z}$$

de modo tal que la divergencia es, por definición

$$\operatorname{div}\left(\vec{F}\right) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

y la integral sobre el volumen se puede descomponer en la suma de tres integrales

$$\iiint\limits_{\Omega} \operatorname{div}\left(\vec{F}\right) dv = \iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x} dv + \iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial y} dv + \iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dv$$

En cuanto a la integral sobre la superficie $\partial\Omega$, se puede aplicar una descomposición similar

$$\iint\limits_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{ds} = \iint\limits_{\partial\Omega} P\hat{x} \cdot \vec{ds} + \iint\limits_{\partial\Omega} Q\hat{y} \cdot \vec{ds} + \iint\limits_{\partial\Omega} R\hat{z} \cdot \vec{ds}$$

Si se logra probar que

$$\begin{cases} \displaystyle\iint\limits_{\partial\Omega} P\hat{x} \cdot \hat{n}\, ds = \iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x} dv \\ \displaystyle\iint\limits_{\partial\Omega} Q\hat{y} \cdot \hat{n}\, ds = \iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial y} dv \\ \displaystyle\iint\limits_{\partial\Omega} R\hat{z} \cdot \hat{n}\, ds = \iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dv \end{cases}$$

entonces el teorema estará demostrado. Los señores Marsden y Tromba nos proponen probar la tercera igualdad y dicen que las otras se prueban de forma análoga. Me parece razonable así que continuaremos confiando en vuestra sabiduría.

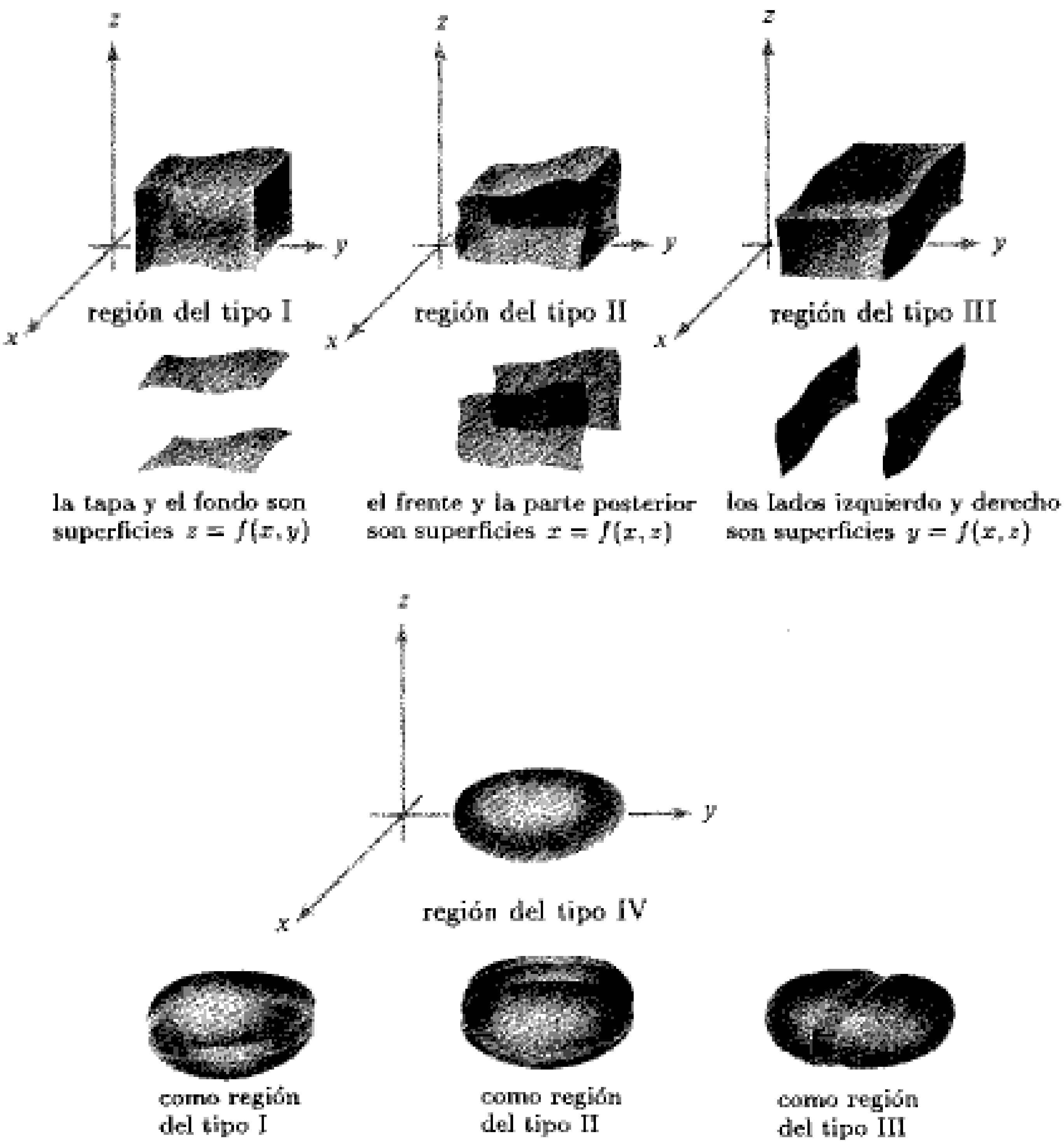

Figura 6.1.3 Cuatro posibles tipos de regiones en el espacio.

Figura 2: Tipos de regiones, tomado del Marsden Tromba.

Dado que Ω es una región de tipo IV, en particular de tipo I (ver figura 2) entonces existen dos funciones $f_1(x,y)$ y $f_2(x,y)$ tales que su dominio D es una región elemental del plano xy (D es la "sombra de Ω sobre el piso") y entonces todos los puntos de Ω satisfacen

$$f_1(x,y) \leq z \leq f_2(x,y) \qquad (x,y) \in D$$

Entonces tenemos que

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z}\, dv = \iint\limits_{D} \left(\int\limits_{z=f_1(x,y)}^{z=f_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\, dz \right) dx\, dy$$

y debido al teorema fundamental del cálculo

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z}\, dv = \iint\limits_{D} \left[R(x,y,f_2(x,y)) - R(x,y,f_1(x,y)) \right] dx\, dy$$

En cuanto a la integral sobre la superficie $\partial\Omega$, la podemos descomponer como

$$\iint\limits_{\partial\Omega} R\hat{z}\cdot\hat{n}\, ds = \iint\limits_{S_1} R\hat{z}\cdot\hat{n}\, ds + \iint\limits_{S_2} R\hat{z}\cdot\hat{n}\, ds + \sum_{i=3}^{6} \iint\limits_{S_i} R\hat{z}\cdot\hat{n}\, ds$$

donde S_1 y S_2 son las tapas correspondientes a los gráficos de $f_1(x,y)$ y $f_2(x,y)$ con $(x,y)\in D$ y las demás superficies son las posibles paredes que puedan requerirse para unir a S_1 con S_2. Como las paredes son verticales, esto quiere decir que $\hat{z}\cdot\hat{n}_{3,4,5,6} = 0$ por lo que

$$\iint\limits_{\partial\Omega} R\hat{z}\cdot\hat{n}\, ds = \iint\limits_{S_1} R\hat{z}\cdot\hat{n}\, ds + \iint\limits_{S_2} R\hat{z}\cdot\hat{n}\, ds + \cancel{\sum_{i=3}^{6} \iint\limits_{S_i} R\hat{z}\cdot\hat{n}\, ds}$$

Dado que S_1 está dada por $z = f_1(x,y)$ entonces

$$\hat{n}_1 = \frac{\frac{\partial f_1}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\hat{y} - \hat{z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2 + 1}}$$

donde el $-\hat{z}$ es debido a que la normal apunta "hacia abajo" de modo que sea el flujo saliente. Entonces

$$\hat{n}\cdot\hat{z} = \frac{-1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2 + 1}}$$

de forma que

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{S_1} R\hat{z}\cdot\hat{n}_1\, ds &= \iint\limits_{D} R(x,y,f(x,y)) \frac{-1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2 + 1}} \sqrt{\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2 + 1}\, dA \\
&= -\iint\limits_{D} R(x,y,f_1(x,y))\, dx\, dy
\end{aligned}$$

De manera análoga para la cara superior con S_2 se obtiene lo mismo pero sin el signo menos, es decir

$$\iint\limits_{S_2} R\hat{z}\cdot\hat{n}\, ds = \iint\limits_{D} R(x,y,f_1(x,y))\, dx\, dy$$

por lo que es evidente entonces que

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z}\, dv = \iint\limits_{\partial\Omega} R\hat{z}\cdot\hat{n}\, ds$$

De la misma forma se pueden probar las igualdades para P y para Q, obteniendo así la demostración del teorema de Gauss.

Ejercicio 2

Supongo que si muestro que $\vec{F}$ es un campo conservativo ya está... Dado que $\vec{F} \in C^1$ en todo $\mathbb{R}^3$, entonces, usando el "teorema de campos conservativos", sabemos que si $\operatorname{rot}\left(\vec{F}\right) = \vec{0}$ entonces

$$\int\limits_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = f(P_1) - f(P_0)$$

donde C es cualquier curva suave a trozos que une los puntos P_0 con P_1 (con la orientación pedida en la consigna) y $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es una función tal que $\operatorname{grad}(f) = \vec{F}$. Calculamos entonces

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\left(\vec{F}\right) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial F_2}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial y} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial x} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} xe^y - xe^y \\ e^y - e^y \\ 2x\cos y - 2x\cos y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \checkmark\end{aligned}$$

Esto implica que $\vec{F}$ es un campo conservativo en $\mathbb{R}^3$ y que existe f tal que $\operatorname{grad}(f) = \vec{F}$ y que $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = f(P_1) - f(P_0)$ por lo que la integral no depende del camino.

Ejercicio 4

Dado el sistema $\vec{x}' = \vec{F}(\vec{x}(t))$, los puntos de equilibrio del sistema serán todos aquellos $\vec{x}_0$ tales que $\vec{F}(\vec{x}_0) = \vec{0}$. En este caso

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} xe^{y-3} \\ 2\sin x + 3 - y \end{bmatrix}$$

Igualando $\vec{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ se obtiene

$$\begin{cases} xe^{y-3} = 0 \\ 2\sin x + 3 - y = 0 \end{cases} \iff x = 0 \quad \Rightarrow \vec{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

el único punto crítico del sistema. Ahora utilizamos el teorema de estabilidad lineal que plantea que existe una biyectividad, en un entorno de $\vec{x}_0$, entre las soluciones del sistema $\vec{x}' = \vec{F}(\vec{x})$ y el sistema $\vec{y}' = D\vec{F}\Big]_{\vec{x}_0} \vec{y}$. El diferencial de $\vec{F}$ es

$$D\vec{F} = \begin{bmatrix} e^{y-3} & xe^{y-3} \\ 2\cos x & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow D\vec{F}\Big]_{\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Esto implica que, en un entorno de $\vec{x}_0$, el sistema original se comportará como el sistema lineal

$$\vec{y}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \vec{y}'$$

Los autovalores del mismo son

$$\det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 2 & -1 - \lambda \end{bmatrix} = (1 - \lambda)(-1 - \lambda) \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$$

Al haber dos autovalores distintos ya sabemos que la matriz es diagonalizable y que las soluciones serán

$$\vec{y}(t) = \vec{\xi}_1 e^t + \vec{\xi}_2 e^{-t}$$

donde $\vec{\xi}_i$ son los autovectores de la matriz. Lo que queda ya es muy fácil y no lo voy a hacer. El punto de equilibrio es inestable ya que diverge cuando $t \to +\infty$.

6. Final del 03/08/2010

Consigna

Ejercicio 1

Calcular el flujo de

$$\vec{F}(x,y,z) = \begin{bmatrix} x+1 \\ x^3 - \ln\left(z^2+1\right) \\ 2z + \cos\left(y^2\right) \end{bmatrix}$$

a través del trozo de esfera de ecuación $x^2+y^2+z^2=4$ con $x \geq 0$, orientado de modo tal que la normal en el punto $(2,0,0)$ es $\eta = (1,0,0)$.

Ejercicio 2

Enunciar y demostrar el Teorema de Stokes para una superficie que sea el gráfico de una función de clase C^2.

Ejercicio 3

Sean $\Lambda(t) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ y $b(t) \in \mathbb{R}^2$ continuas en un intervalo abierto I. Consideremos el sistema

$$\vec{x}' = \Lambda(t)\vec{x} + b(t)$$

1. Probar que la solución general es de la forma $\vec{x}(t) = \vec{x}_h(t) + \vec{x}_p(t)$ donde $\vec{x}_p$ es una solución particular y $\vec{x}_h$ es la solución general del sistema homogéneo asociado.
2. Sean $\vec{x}_1$ y $\vec{x}_2$ soluciones linealmente independientes del sistema homogéneo asociado. Demostrar que siempre es posible encontrar una solución particular $\vec{x}_p$ del sistema de la forma $\vec{x}_p(t) = c_1(t)\vec{x}_1(t) + c_2(t)\vec{x}_2(t)$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ funciones de clase C^1 en I.

Resolución

Ejercicio 1

Claramente esto apunta a utilizar el teorema de Gauss y quizás el teorema de Stokes. Para verificarlo calculamos

$$\text{div}\left(\vec{F}\right) = 1 + 0 + 2 = 3\checkmark$$

Listo, es evidente que va por este lado. Aplicando el teorema de Gauss tenemos que

$$\iint\limits_S \vec{F} \cdot \vec{ds} = \iiint\limits_V \text{div}\left(\vec{F}\right)\, dx\, dy\, dz - \iint\limits_T \vec{F} \cdot \vec{ds}$$

donde S es la superficie de la consigna, con la orientación pedida, T es la "tapa" de S con normal exterior y V es la región de volumen encerrada por S y T. Si tomamos

$$T = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } z^2 + y^2 \leq 4, x = 0\right\}$$

creo que la integral sobre T debería quedar lo suficientemente sencilla como para ser resuelta. Entonces

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_V \text{div}\left(\vec{F}\right)\, dx\, dy\, dz &= 3 \iiint\limits_V dx\, dy\, dz \\
&= 3 \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^2 \cos\theta \, d\varphi\, d\theta\, dr \\
&= 3 \frac{\text{volumen de la esfera}}{2} \\
&= 16\pi
\end{aligned}$$

Para la otra integral parametrizamos a T mediante

$$T(r, \theta) = \begin{bmatrix} 0 \\ r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} r \in [0, 2] \\ \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

La normal (exterior) a esta superficie, sin necesidad de hacer cuentas, es $\hat{\eta} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $||T_r \times T_\theta|| = r$, por lo que

$$\begin{aligned}
\iint\limits_T \vec{F} \cdot \vec{ds} &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \vec{F}\Big]_{T(r,\theta)} \cdot \hat{\eta}\, ||T_r \times T_\theta||\, d\theta\, dr \\
&= \int_0^2 \int_0^{2\pi} (x+1)\rfloor_{T(r,\theta)}\, r\, d\theta\, dr \\
&= \int_0^2 \int_0^{2\pi} r\, d\theta\, dr \\
&= 4\pi
\end{aligned}$$

Finalmente

$$\boxed{\iint\limits_S \vec{F} \cdot \vec{ds} = 12\pi}$$

Ejercicio 2

Teorema (**Stokes**). Sea $\partial D^{+} \subset \mathbb{R}^2$ una curva cerrada, simple y suave a trozos con orientación positiva. Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ la región del plano encerrada por ∂D^{+}. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie (suave) dada por la parametrización regular $\sigma : D \to S$. Sea $\vec{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 tal que $S \subset \Omega$. Entonces

$$\int\limits_{\partial S^{+}} \vec{F} \cdot \vec{d\ell} = \iint\limits_{S} \operatorname{rot}\left(\vec{F}\right) \cdot \vec{ds}$$

donde ∂S^{+} es la "frontera" (o borde) de S dada por $\partial S^{+} = \{(x,y,z) \in S \text{ tq } (x,y,z) = \sigma(u,v) \text{ con } (u,v) \in \partial D^{+}\}$.

La demostración de la dejo a los libros, yo no soy bueno para estas cosas.

Ejercicio 3

Primera parte (tomado del apunte oficial de la materia)

Sea $\vec{x}_p$ una solución particular y sea $\vec{x}_1$ otra solución. Entonces $\vec{x}_h = \vec{x}_p - \vec{x}_1$ es solución del sistema homogéneo asociado ya que

$$\begin{aligned} \vec{x}_h' &= \vec{x}_p' - \vec{x}_1' \\ &= \Lambda\vec{x}_p + \vec{b} - \Lambda\vec{x}_1 - \vec{b} \\ &= \Lambda\left(\vec{x}_p - \vec{x}_1\right) \\ &= \Lambda\vec{x}_h \end{aligned}$$

Sea ahora $\vec{x}_2 = \vec{x}_p + \vec{x}_h$. Entonces

$$\begin{aligned} \vec{x}_2' &= \vec{x}_p' + \vec{x}_h' \\ &= \Lambda\vec{x}_p + \vec{b} + \Lambda\vec{x}_h \\ &= \Lambda\left(\vec{x}_p + \vec{x}_h\right) + \vec{b} \\ &= \Lambda\vec{x}_2 + \vec{b} \end{aligned}$$

por lo tanto $\vec{x}_2$ es solución del sistema ✓.

Segunda parte (tomado del apunte oficial de la materia)

Sea $\mathscr{Q}(t)$ la "matriz fundamental", es decir aquella cuyas columnas son las soluciones del sistema homogéneo. Entonces se tiene que

$$\mathscr{Q}'(t) = \Lambda(t)\mathscr{Q}(t)$$

y la solución general del sistema homogéneo asociado es

$$\vec{x}_h(t) = \mathscr{Q}(t)\vec{c}$$

donde $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$ es un vector constante (en este caso $n = 2$). Siguiendo con esta idea se tiene

$$\vec{x}_p(t) = \mathscr{Q}(t)\vec{C}(t)$$

donde ahora $\vec{C}(t)$ es un vector continuo y diferenciable en I. Si se deriva a $\vec{x}_p$ se obtiene

$$\vec{x}_p' = \mathscr{Q}'\vec{C} + \mathscr{Q}\vec{C}'$$

Reemplazando $\mathscr{Q}'$ por $\Lambda\mathscr{Q}$

$$\begin{aligned} \vec{x}_p' &= \Lambda\mathscr{Q}\vec{C} + \mathscr{Q}\vec{C}' \\ &= \Lambda\vec{x}_p + \mathscr{Q}\vec{C}' \end{aligned}$$

Si pedimos que $\mathscr{Q}\vec{C}' = \vec{b}(t)$ entonces $\vec{x}_p = \mathscr{Q}\vec{C}(t)$ será solución del sistema. Como $\det\mathscr{Q} \neq 0 \forall t \in I$ (por ser una matriz fundamental) entonces $\exists\mathscr{Q}^{-1}$ por lo que

$$\vec{C}'(t) = \mathscr{Q}^{-1}(t)\vec{b}(t)$$

Lo único que resta ahora es integrar $\vec{C}(t) = \int \vec{C}'(\tau)\,d\tau$ componente a componente y se obtuvo $\vec{x}_p(t)$✓.