



Universidad de Buenos Aires
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Año 2018

Trabajo final de Física Teórica 1

Haces de Laguerre-Gauss: Obtención a partir
de las Ecuaciones de Maxwell y breve
estudio sobre sus propiedades

Matías H. Senger

Índice

1. De las ecuaciones de Maxwell a los haces de Laguerre-Gauss	1
2. Densidad de momento angular de los haces vectoriales	10
3. Haces de Laguerre-Gauss escalares	15
3.1. Distribución de intensidad y de fase de los haces de Laguerre-Gauss	15
4. Momento angular del haz escalar	18
4.1. Combinaciones lineales de haces escalares de Laguerre-Gauss	21
5. Conclusiones	23
A. Código utilizado para graficar los modos de Laguerre-Gauss escalares	25
B. Código utilizado para graficar los vectores de Poynting	27
C. Código utilizado para el cálculo numérico del momento angular	29

1. De las ecuaciones de Maxwell a los haces de Laguerre-Gauss

Consideremos las ecuaciones de Maxwell para los campos macroscópicos en ausencia de fuentes libres, es decir

$$\text{Maxwell} \rightarrow \begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \mathbf{D} = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

Si consideramos además las siguientes relaciones constitutivas

$$\text{Asumo esto} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu(\mathbf{r}) \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \end{cases}$$

entonces las ecuaciones de Maxwell se convierten en

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} + \varepsilon \vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \mathbf{H} + \mu \vec{\nabla} \cdot \mathbf{H} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \mathbf{E} + \frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \mathbf{H} - \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Aplicando el rotor a las ecuaciones que ya tienen rotor

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \mathbf{E} + \vec{\nabla} \times \left(\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \mathbf{H} - \vec{\nabla} \times \left(\frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = 0 \end{cases}$$

y usando la identidad $\vec{\nabla} \times (f\mathbf{A}) = (\vec{\nabla}f) \times \mathbf{A} + f(\vec{\nabla} \times \mathbf{A})$ se obtiene

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \mathbf{E} + \frac{\vec{\nabla}\mu}{c} \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \frac{\mu}{c} \vec{\nabla} \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \mathbf{H} - \frac{\vec{\nabla}\varepsilon}{c} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \frac{\varepsilon}{c} \vec{\nabla} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Si a las ecuaciones $\begin{cases} \vec{\nabla} \times \mathbf{E} + \frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \mathbf{H} - \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \end{cases}$, provenientes de (1), se las deriva respecto al tiempo se obtiene

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\mu}{c} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$

Ahora se puede introducir esto en (2) para reemplazar a $\begin{cases} \vec{\nabla} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \end{cases}$. Se obtiene

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \mathbf{E} + \frac{\vec{\nabla}\mu}{c} \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \mathbf{H} - \frac{\vec{\nabla}\varepsilon}{c} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$

Nuevamente se hace uso de (1) para obtener
$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\frac{c}{\mu} \vec{\nabla} \times \mathbf{E} \\ \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{c}{\varepsilon} \vec{\nabla} \times \mathbf{H} \end{cases}$$
 y reemplazarlo en el sistema anterior. Lo que queda es

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \mathbf{E} + \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{\vec{\nabla}\mu}{\mu} \times \vec{\nabla} \times \mathbf{E} \\ \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \mathbf{H} + \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = \frac{\vec{\nabla}\varepsilon}{\varepsilon} \times \vec{\nabla} \times \mathbf{H} \end{cases}$$

Se han obtenido dos ecuaciones desacopladas, una para \mathbf{E} y otra para \mathbf{H} .

Considérese ahora la ecuación para \mathbf{E} . Si se usa la identidad $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \mathbf{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ se obtiene

$$\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} + \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{\vec{\nabla}\mu}{\mu} \times \vec{\nabla} \times \mathbf{E}$$

Ahora se reemplaza la divergencia por $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} = -\frac{\vec{\nabla}\varepsilon}{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}$ (esto se obtiene de (1)) con lo cual queda

$$-\nabla^2 \mathbf{E} + \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{\vec{\nabla}\mu}{\mu} \times \vec{\nabla} \times \mathbf{E} + \vec{\nabla} \left(\frac{\vec{\nabla}\varepsilon}{\varepsilon} \cdot \mathbf{E} \right)$$

Por último se hace la asunción de que las inhomogeneidades del medio se deben sólo a la permitividad eléctrica, es decir

$$\text{Asumo que el medio satisface} \rightarrow \begin{cases} \varepsilon = \varepsilon(\mathbf{r}) \\ \mu = \text{constante} \end{cases}$$

Esto hace que el término con $\vec{\nabla}\mu$ se anule por lo que

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\vec{\nabla} \left(\frac{\vec{\nabla}\varepsilon}{\varepsilon} \cdot \mathbf{E} \right) \leftarrow \mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$$

Proponiendo una solución armónica en el tiempo de la forma

$$\mathbf{E}'(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{i\omega t} \rightarrow \text{Propongo solución} \quad (3)$$

(perdón por el cambio de notación, el vector $\mathbf{E}'(\mathbf{r}, t)$ es lo que antes venía llamando $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, es sólo para no arrastrar un t hasta el final de los tiempos) se encuentra que $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ satisface

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mu \mathbf{E} = -\vec{\nabla} \left(\frac{\vec{\nabla}\varepsilon}{\varepsilon} \cdot \mathbf{E} \right) \leftarrow \mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

Acá identificamos a

$$k^2(\mathbf{r}) = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\mathbf{r}) \mu \rightarrow \text{Constante de propagación}$$

como la constante de propagación entonces (multiplicando y dividiendo, además, del lado derecho por $\mu \frac{\omega^2}{c^2}$) se obtiene

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = -\vec{\nabla} \left(\frac{\vec{\nabla}k^2}{k^2} \cdot \mathbf{E} \right)$$

Por último aplicando $\vec{\nabla}k^2 = 2k\vec{\nabla}k$ finalmente se obtiene

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + k^2(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -2\vec{\nabla} \left(\frac{\vec{\nabla}k(\mathbf{r})}{k(\mathbf{r})} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \right)}$$

y esto es la ecuación de Helmholtz para un medio con $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{r})$ y $\mu = \text{constante}$. Este es el punto de partida de [10].

A continuación vamos a asumir [10] que las inhomogeneidades en $k(\mathbf{r})$ (es decir, en $\varepsilon(\mathbf{r})$) no son nulas pero sí son suficientemente pequeñas como para que

$$\frac{\vec{\nabla}k}{k} \approx 0$$

y en tal caso la ecuación anterior se reduce a la conocida ecuación de Helmholtz:

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0$$

pero no debe olvidarse que $k = k(\mathbf{r})$.

Ahora se propone una solución en coordenadas cilíndricas de la forma

$$\mathbf{E}(r, \phi, z) = E_r(r, \phi, z) \hat{\mathbf{r}} + E_\phi(r, \phi, z) \hat{\phi} \quad (4)$$

y se reemplaza

$$\nabla_{\text{en cilíndricas}}^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

con lo cual

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) (E_r \hat{\mathbf{r}} + E_\phi \hat{\phi}) = 0 \quad (5)$$

Si se desarrolla la ecuación anterior

Cálculos Auxiliares

- Primer término:

$$\frac{\partial}{\partial r} (E_r \hat{\mathbf{r}}) = \frac{\partial E_r}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + E_r \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial r}$$

- Segundo término:

$$\frac{\partial^2 (E_r \hat{\mathbf{r}})}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 E_r}{\partial r^2} \hat{\mathbf{r}} \leftarrow \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial r}$$

- Tercer término:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 (E_r \hat{\mathbf{r}})}{\partial \phi^2} &= \frac{\partial^2 E_r}{\partial \phi^2} \hat{\mathbf{r}} + 2 \frac{\partial E_r}{\partial \phi} \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \phi} + E_r \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{r}}}{\partial \phi^2} \\ \left\{ \begin{array}{l} \hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{x}} \cos \phi + \hat{\mathbf{y}} \sin \phi \\ \hat{\phi} = -\hat{\mathbf{x}} \sin \phi + \hat{\mathbf{y}} \cos \phi \end{array} \right. &\rightarrow = \frac{\partial^2 E_r}{\partial \phi^2} \hat{\mathbf{r}} + 2 \frac{\partial E_r}{\partial \phi} \hat{\phi} - E_r \hat{\mathbf{r}} \end{aligned}$$

- Cuarto término:

$$\frac{\partial^2 (E_r \hat{\mathbf{r}})}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 E_r}{\partial z^2} \hat{\mathbf{r}} \leftarrow \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial z}$$

- Quinto término:

$$k^2 E_r \hat{\mathbf{r}}$$

- Sexto término:

$$\frac{\partial (E_\phi \hat{\phi})}{\partial r} = \frac{\partial E_\phi}{\partial r} \hat{\phi} \leftarrow \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial r} = 0$$

- Séptimo término:

$$\frac{\partial^2 (E_\phi \hat{\phi})}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 E_\phi}{\partial r^2} \hat{\phi} \leftarrow \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial r} = 0$$

- Octavo término:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 (E_\phi \hat{\phi})}{\partial \phi^2} &= \frac{\partial^2 E_\phi}{\partial \phi^2} \hat{\phi} + 2 \frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \phi} + E_\phi \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial \phi^2} \\ \left\{ \begin{array}{l} \hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{x}} \cos \phi + \hat{\mathbf{y}} \sin \phi \\ \hat{\phi} = -\hat{\mathbf{x}} \sin \phi + \hat{\mathbf{y}} \cos \phi \end{array} \right. &\rightarrow = \frac{\partial^2 E_\phi}{\partial \phi^2} \hat{\phi} - 2 \frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} \hat{\mathbf{r}} - E_\phi \hat{\phi} \end{aligned}$$

- Noveno término:

$$\frac{\partial^2 (E_\phi \hat{\phi})}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 E_\phi}{\partial z^2} \hat{\phi} \leftarrow \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial z} = 0$$

- Décimo término:

$$k^2 E_\phi \hat{\phi}$$

Reemplazando en (5) se obtiene

$$\begin{aligned}
 (\nabla^2 + k^2) \mathbf{E} &= \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{\partial^2 E_r}{\partial r^2} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 E_r}{\partial \phi^2} \hat{\mathbf{r}} + 2 \frac{\partial E_r}{\partial \phi} \hat{\boldsymbol{\phi}} - E_r \hat{\mathbf{r}} \right) + \frac{\partial^2 E_r}{\partial z^2} \hat{\mathbf{r}} + k^2 E_r \hat{\mathbf{r}} + \dots \\
 &\dots + \frac{1}{r} \frac{\partial E_\phi}{\partial r} \hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial^2 E_\phi}{\partial r^2} \hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 E_\phi}{\partial \phi^2} \hat{\boldsymbol{\phi}} - 2 \frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} \hat{\mathbf{r}} - E_\phi \hat{\boldsymbol{\phi}} \right) + \frac{\partial^2 E_\phi}{\partial z^2} \hat{\boldsymbol{\phi}} + k^2 E_\phi \hat{\boldsymbol{\phi}}
 \end{aligned}$$

y separando en componentes

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 E_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_r}{\partial \phi^2} - \frac{E_r}{r^2} + \frac{\partial^2 E_r}{\partial z^2} + k^2 E_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} = 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial E_\phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 E_\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_\phi}{\partial \phi^2} - \frac{E_\phi}{r^2} + \frac{\partial^2 E_\phi}{\partial z^2} + k^2 E_\phi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial E_r}{\partial \phi} = 0 \end{cases}$$

se obtiene

$$\begin{cases} \underbrace{\left(\frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 E_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_r}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 E_r}{\partial z^2} \right)}_{\nabla^2 E_r} + k^2 E_r = \frac{1}{r^2} \left(E_r + 2 \frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} \right) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial E_\phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 E_\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_\phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 E_\phi}{\partial z^2} + k^2 E_\phi = \frac{1}{r^2} \left(E_\phi - 2 \frac{\partial E_r}{\partial \phi} \right) \end{cases} \quad (6)$$

y reconocemos dos laplacianos en coordenadas cilíndricas por lo que el sistema anterior se puede expresar de manera simplificada como

$$\begin{cases} \nabla^2 E_r + k^2 E_r = \frac{1}{r^2} \left(E_r + 2 \frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} \right) \\ \nabla^2 E_\phi + k^2 E_\phi = \frac{1}{r^2} \left(E_\phi - 2 \frac{\partial E_r}{\partial \phi} \right) \end{cases}$$

que son dos ecuaciones acopladas para E_r y E_ϕ . Estas ecuaciones se pueden desacoplar si se propone que

$$\begin{cases} E_r(r, \phi, z) = \mp E_0 T_\pm(r, z) \sin(n\phi) \\ E_\phi(r, \phi, z) = E_0 T_\pm(r, z) \cos(n\phi) \end{cases} \quad (7)$$

Comentario sobre la sustitución anterior

Se acaba de proponer la sustitución dada por

$$\begin{cases} E_r(r, \phi, z) = \mp E_0 T_\pm(r, z) \sin(n\phi) \\ E_\phi(r, \phi, z) = E_0 T_\pm(r, z) \cos(n\phi) \end{cases}$$

Sin embargo no es la única posibilidad. Tal como señala Tovar [10], también es posible utilizar la sustitución dada por

$$\begin{cases} E_r(r, \phi, z) = E_0 T_\pm(r, z) \cos(n\phi) \\ E_\phi(r, \phi, z) = \pm E_0 T_\pm(r, z) \sin(n\phi) \end{cases} \quad (8)$$

No sólo eso, Casperson [3] también indica que hay otras dos sustituciones posibles dadas por

$$\begin{cases} E_r(r, \phi, z) = \pm E_0 T_\pm(r, z) i e^{in\phi} \\ E_\phi(r, \phi, z) = E_0 T_\pm(r, z) e^{in\phi} \end{cases} \quad \begin{cases} E_r(r, \phi, z) = \pm E_0 T_\pm(r, z) i e^{-in\phi} \\ E_\phi(r, \phi, z) = E_0 T_\pm(r, z) e^{-in\phi} \end{cases}$$

De todos modos las segundas dos sustituciones no conducen a nada nuevo. Si las primeras dos sustituciones. Según si se elige (7) o (8) se obtendrán dos resultados distintos. En el presente documento se hace la cuenta utilizando (7) y al final se lista el resultado para los dos casos [10].

Reemplazando esto en (6) se obtiene

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial T_\pm}{\partial r} \mp \frac{\partial^2 T_\pm}{\partial r^2} \pm \frac{T_\pm n^2}{r^2} \mp \frac{\partial^2 T_\pm}{\partial z^2} \mp k^2 T_\pm \right) E_0 \sin(n\phi) = \frac{1}{r^2} \left(\mp T_\pm E_0 \sin(n\phi) - 2 T_\pm n E_0 \sin(n\phi) \right) \\ \left(\frac{1}{r} \frac{\partial T_\pm}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_\pm}{\partial r^2} - \frac{T_\pm n^2}{r^2} + \frac{\partial^2 T_\pm}{\partial z^2} + k^2 T_\pm \right) E_0 \cos(n\phi) = \frac{1}{r^2} \underbrace{\left(T_\pm E_0 \cos(n\phi) \pm 2 T_\pm n E_0 \cos(n\phi) \right)}_{(\pm 2n+1) T_\pm} \end{cases}$$

y reacomodando la segunda ecuación lo que queda es

$$\frac{\partial^2 T_{\pm}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\pm}}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_{\pm}}{\partial z^2} + \left(k^2 - \frac{(n \pm 1)^2}{r^2} \right) T_{\pm} = 0 \quad (9)$$

El siguiente paso es considerar

$$T_{\pm}(r, z) = U_{\pm}(r, z) \exp \left(-i \int_0^z k_0(z') dz' \right) \quad (10)$$

donde

$$k_0(z) = 2\pi \frac{\omega}{c} n_0(z) + \frac{i}{2} g_0(z) \quad (11)$$

siendo $n_0(z)$ el índice de refracción del medio y $g_0(z)$ el *coeficiente de ganancia de intensidad* [10]. Introduciendo esto en (9)

Cálculos Auxiliares

- Primer término:

$$\frac{\partial^2 T_{\pm}}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 U_{\pm}}{\partial r^2} \exp \left(-i \int_0^z k_0 dz \right)$$

- Segundo término:

$$\frac{\partial T_{\pm}}{\partial r} = \frac{\partial U_{\pm}}{\partial r} \exp \left(-i \int_0^z k_0 dz \right)$$

- Tercer término:

$$\frac{\partial^2 T_{\pm}}{\partial z^2} = \left(\frac{\partial^2 U_{\pm}}{\partial z^2} - 2i \frac{\partial U_{\pm}}{\partial z} k_0 - U_{\pm} k_0^2 - i U_{\pm} \frac{\partial k_0}{\partial z} \right) \exp \left(-i \int_0^z k_0 dz \right)$$

Reemplazando en (9) queda

$$\left(\frac{\partial^2 U_{\pm}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_{\pm}}{\partial r} + \frac{\partial^2 U_{\pm}}{\partial z^2} - 2i \frac{\partial U_{\pm}}{\partial z} k_0 - U_{\pm} k_0^2 - i U_{\pm} \frac{\partial k_0}{\partial z} + \left(k^2 - \frac{(n \pm 1)^2}{r^2} \right) U_{\pm} \right) \exp \left(-i \int_0^z k_0 dz \right) = 0$$

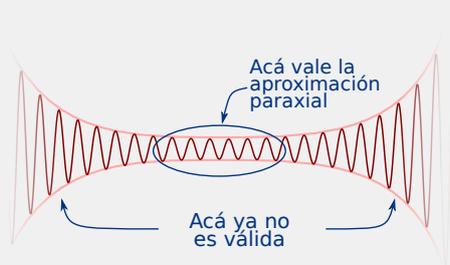
se obtiene

$$\frac{\partial^2 U_{\pm}}{\partial z^2} - 2ik_0 \frac{\partial U_{\pm}}{\partial z} + \frac{\partial^2 U_{\pm}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_{\pm}}{\partial r} + \left[k^2 - k_0^2 - i \frac{\partial k_0}{\partial z} - \frac{(n \pm 1)^2}{r^2} \right] U_{\pm} = 0 \quad (12)$$

Lo que sigue es considerar que U_{\pm} satisface la aproximación paraxial

La aproximación paraxial

La aproximación paraxial [12, sec. 16.7.1] básicamente consiste en asumir que la envolvente de una onda que se propaga en el espacio es similar a la de un puntero láser, es decir que no se abre mucho en comparación con la longitud de onda. Gráficamente se podría representar de la siguiente manera:



A nivel matemático es como sigue: considérese la ecuación de Helmholtz

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E} = 0$$

para una onda vectorial \mathbf{E} . Se propone una solución en coordenadas cilíndricas de la forma

$$\mathbf{E}(r, \phi, z, t) = \Psi(r, \phi, z, \omega) e^{ikz - i\omega t}$$

donde Ψ es una “envolvente vectorial” que depende de la frecuencia ω . Introduciéndola en la ecuación de Helmholtz se obtiene

$$\begin{aligned} \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Psi(r, \phi, z, \omega) e^{ikz - i\omega t} &= 0 \\ (\nabla^2 - k^2) \Psi e^{ikz} &= \end{aligned}$$

que es el resultado ya conocido.

Ahora se plantea la ecuación en coordenadas cilíndricas

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \Psi e^{ikz} &= 0 \\ \left(\nabla_{\perp}^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \Psi e^{ikz} &= \end{aligned}$$

donde ∇_{\perp}^2 es el “laplaciano transversal a z ”. Se desarrolla ahora la derivada respecto a z :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\Psi e^{ikz}) &= \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} e^{ikz} + 2ik \frac{\partial \Psi}{\partial z} e^{ikz} - k^2 \Psi e^{ikz} \\ &= \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + 2ik \frac{\partial \Psi}{\partial z} - k^2 \Psi \right) e^{ikz} \end{aligned}$$

Volviendo a introducir esto en la ecuación de Helmholtz se obtiene

$$\begin{aligned} \left(\nabla_{\perp}^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \Psi e^{ikz} &= \nabla_{\perp}^2 \Psi e^{ikz} + \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + 2ik \frac{\partial \Psi}{\partial z} - k^2 \Psi \right) e^{ikz} + k^2 \Psi e^{ikz} \\ &= \left(\nabla_{\perp}^2 \Psi + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + 2ik \frac{\partial \Psi}{\partial z} - \cancel{k^2 \Psi} + \cancel{k^2 \Psi} \right) e^{ikz} \\ &= 0 \end{aligned}$$

por lo tanto se encuentra que

$$\nabla_{\perp}^2 \Psi + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + 2ik \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0$$

Ahora se introduce la *aproximación paraxial* [1] que es

$$\left| \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right| \ll \left| \nabla_{\perp}^2 \Psi \right| + \left| 2ik \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right| \rightarrow \text{Paraxial approximation}$$

de donde se obtiene la ecuación de onda paraxial

$$\left(\nabla_{\perp}^2 + 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right) \Psi = 0 \rightarrow \text{Paraxial wave equation}$$

es decir que

$$\left| \frac{\partial^2 U_{\pm}}{\partial z^2} \right| \ll |\text{todo lo demás}| \rightarrow \text{Aproximación paraxial}$$

por lo tanto vamos a considerar que $\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \rightarrow 0$ y entonces (12) se convierte en

$$-2ik_0 \frac{\partial U_{\pm}}{\partial z} + \frac{\partial^2 U_{\pm}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_{\pm}}{\partial r} + \left[k^2 - k_0^2 - i \frac{\partial k_0}{\partial z} - \frac{(n \pm 1)^2}{r^2} \right] U_{\pm} = 0 \quad (13)$$

Ahora se asume que $k(\mathbf{r})$ viene dado por [10]

$$k(r, z) = k_0(z) - k_2(z) \frac{r^2}{2} \rightarrow \text{Complex lenslike media}$$

y que, debido a que las inhomogeneidades son relativamente suaves, además se tiene que [10]

$$k^2(r, z) \approx k_0(z) [k_0(z) - k_2(z) r^2] \rightarrow \text{Weakly profiled media}$$

Introduciendo esta última expresión en (13) se obtiene

$$-2ik_0 \frac{\partial U_{\pm}}{\partial z} + \frac{\partial^2 U_{\pm}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_{\pm}}{\partial r} - \left[k_0 k_2 r^2 + i \frac{\partial k_0}{\partial z} + \frac{(n \pm 1)^2}{r^2} \right] U_{\pm} = 0$$

A continuación se propone que

$$U_{\pm}(r, z) = L(r, z) e^{-iQ(z) \frac{r^2}{2} - iP(z)} \quad (14)$$

donde $Q(z)$ y $P(z)$ son dos funciones arbitrarias (o sea, pueden ser cualquier cosa, la física se impone sobre $L(r, z)$). Introduciendo esto en la ecuación anterior

Cálculos Auxiliares

- Primer término

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_{\pm}}{\partial z} &= \frac{\partial L}{\partial z} e^{-iQ(z) \frac{r^2}{2} - iP(z)} + L \left(e^{-iQ(z) \frac{r^2}{2} - iP(z)} \left[-i \frac{\partial Q}{\partial z} \frac{r^2}{2} - i \frac{\partial P}{\partial z} \right] \right) \\ &= \left(\frac{\partial L}{\partial z} + L \left(-i \frac{\partial Q}{\partial z} \frac{r^2}{2} - i \frac{\partial P}{\partial z} \right) \right) e^{-iQ(z) \frac{r^2}{2} - iP(z)} \end{aligned}$$

- Tercer término

$$\frac{\partial U_{\pm}}{\partial r} = \left[\frac{\partial L}{\partial r} + L(-iQr) \right] e^{-iQ(z) \frac{r^2}{2} - iP(z)}$$

- Segundo término

$$\frac{\partial^2 U_{\pm}}{\partial r^2} = \dots = \left(\frac{\partial^2 L}{\partial r^2} - iLQ - 2ir \frac{\partial L}{\partial r} Q - r^2 LQ^2 \right) e^{-iQ(z) \frac{r^2}{2} - iP(z)}$$

Reemplazando se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &= -2ik_0 \left(\frac{\partial L}{\partial z} + L \left(-i \frac{\partial Q}{\partial z} \frac{r^2}{2} - i \frac{\partial P}{\partial z} \right) \right) e^{-iQ \frac{r^2}{2} - iP} + \dots \\ &\dots + \left(\frac{\partial^2 L}{\partial r^2} - iLQ - 2ir \frac{\partial L}{\partial r} Q - r^2 LQ^2 \right) e^{-iQ \frac{r^2}{2} - iP} + \dots \\ &\dots + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial L}{\partial r} + L(-iQr) \right] e^{-iQ \frac{r^2}{2} - iP} - \left[+k_0 k_2 r^2 + i \frac{\partial k_0}{\partial z} + \frac{(n \pm 1)^2}{r^2} \right] L e^{-iQ \frac{r^2}{2} - iP} \\ &= -2ik_0 \frac{\partial L}{\partial z} - 2k_0 \left(\frac{\partial Q}{\partial z} \frac{r^2}{2} + \frac{\partial P}{\partial z} \right) L + \frac{\partial^2 L}{\partial r^2} - iLQ - 2ir \frac{\partial L}{\partial r} Q - r^2 LQ^2 + \dots \\ &\dots + \frac{1}{r} \frac{\partial L}{\partial r} - iLQ - \left[+k_0 k_2 r^2 + i \frac{\partial k_0}{\partial z} + \frac{(n \pm 1)^2}{r^2} \right] L \\ &= -2ik_0 \frac{\partial L}{\partial z} + \frac{\partial^2 L}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{r} - 2irQ \right) \frac{\partial L}{\partial r} - \dots \\ &\dots - \left(\left(Q^2 + k_0 k_2 + k_0 \frac{\partial Q}{\partial z} \right) r^2 + 2k_0 \frac{\partial P}{\partial z} + 2iQ + i \frac{\partial k_0}{\partial z} + \frac{(n \pm 1)^2}{r^2} \right) L \end{aligned}$$

se obtiene

$$-2ik_0 \frac{\partial L}{\partial z} + \frac{\partial^2 L}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{r} - 2irQ \right) \frac{\partial L}{\partial r} - \left(\left(Q^2 + k_0 k_2 + k_0 \frac{\partial Q}{\partial z} \right) r^2 + 2k_0 \frac{\partial P}{\partial z} + 2iQ + i \frac{\partial k_0}{\partial z} + \frac{(n \pm 1)^2}{r^2} \right) L = 0 \quad (15)$$

El siguiente paso consiste en elegir Q y P tales que

$$\text{Chose this } \rightarrow \begin{cases} Q^2 + k_0 \frac{dQ}{dz} + k_0 k_2 = 0 \\ 2k_0 \frac{dP}{dz} = -2iQ - i \frac{dk_0}{dz} - \frac{8p + 4(n \pm 1)}{W^2(z)} \end{cases}$$

donde $W(z)$ ahora es una función arbitraria (P y Q ya no lo son porque deben satisfacer lo anterior). Al introducir estas dos elecciones en (15) lo que se obtiene es sencillamente

$$-2ik_0 \frac{\partial L}{\partial z} + \frac{\partial^2 L}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{r} - 2irQ \right) \frac{\partial L}{\partial r} + \left(\frac{8p + 4(n \pm 1)}{W^2(z)} - \frac{(n \pm 1)^2}{r^2} \right) L = 0$$

El paso que sigue es considerar el cambio de variables dado por

$$\text{Change of variables} \rightarrow \begin{cases} \rho(r, z) = \frac{\sqrt{2}r}{W(z)} \\ \zeta(r, z) = z \end{cases} \iff \begin{cases} r(\rho, \zeta) = \frac{\rho W(\zeta)}{\sqrt{2}} \\ z(\rho, \zeta) = \zeta \end{cases} \quad (16)$$

con lo cual

Cálculos Auxiliares

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial z} &= \frac{\partial L(\rho(r, z), \zeta(z))}{\partial z} \\ &= \frac{\partial L}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{\partial L}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \\ &= -\sqrt{2} \frac{r}{W^2} \frac{\partial W}{\partial z} \frac{\partial L}{\partial \rho} + \frac{\partial L}{\partial \zeta} \\ &= -\frac{\rho}{W} \frac{\partial W}{\partial z} \frac{\partial L}{\partial \rho} + \frac{\partial L}{\partial \zeta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial r} &= \frac{\partial L}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial r} \\ &= \frac{\partial L}{\partial \rho} \frac{\sqrt{2}}{W(z)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 L}{\partial r^2} &= \frac{\partial \left(\frac{\partial L}{\partial r} \right)}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial r} \\ &= \frac{\partial \left(\frac{\partial L}{\partial \rho} \frac{\sqrt{2}}{W(z)} \right)}{\partial \rho} \frac{\sqrt{2}}{W(z)} \\ &= \frac{2}{W^2(z)} \frac{\partial^2 L}{\partial \rho^2} \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} -2ik_0 \frac{\partial L}{\partial z} + \frac{\partial^2 L}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{r} - 2irQ \right) \frac{\partial L}{\partial r} + \left(\frac{8p + 4(n \pm 1)}{W^2} - \frac{(n \pm 1)^2}{r^2} \right) L &= 0 \\ -2ik_0 \left(-\frac{\rho}{W} \frac{\partial W}{\partial z} \frac{\partial L}{\partial \rho} + \frac{\partial L}{\partial \zeta} \right) + \left(\frac{2}{W^2} \frac{\partial^2 L}{\partial \rho^2} \right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{\rho W} - 2i \frac{\rho W}{\sqrt{2}} Q \right) \left(\frac{\partial L}{\partial \rho} \frac{\sqrt{2}}{W} \right) + \dots &= \\ \dots + \left(\frac{8p + 4(n \pm 1)}{W^2} - \frac{(n \pm 1)^2}{\frac{\rho^2 W^2}{2}} \right) L & \\ 2ik_0 \frac{\rho}{W} \frac{\partial W}{\partial z} \frac{\partial L}{\partial \rho} - 2ik_0 \frac{\partial L}{\partial \zeta} + \frac{2}{W^2} \frac{\partial^2 L}{\partial \rho^2} + \left(\frac{2}{\rho W^2} - 2i\rho Q \right) \frac{\partial L}{\partial \rho} + \dots &= \\ \dots + \left(\frac{8p + 4(n \pm 1)}{W^2} - 2 \frac{(n \pm 1)^2}{\rho^2 W^2} \right) L & \\ ik_0 \rho W \frac{\partial W}{\partial z} \frac{\partial L}{\partial \rho} - ik_0 W^2 \frac{\partial L}{\partial \zeta} + \frac{\partial^2 L}{\partial \rho^2} + \left(\frac{1}{\rho} - i\rho Q W^2 \right) \frac{\partial L}{\partial \rho} + \left(4p + 2(n \pm 1) - \frac{(n \pm 1)^2}{\rho^2} \right) L &= \\ -ik_0 W^2 \frac{\partial L}{\partial \zeta} + \frac{\partial^2 L}{\partial \rho^2} + \left(\frac{1}{\rho} - i\rho Q W^2 + ik_0 \rho W \frac{\partial W}{\partial z} \right) \frac{\partial L}{\partial \rho} + \left(4p + 2(n \pm 1) - \frac{(n \pm 1)^2}{\rho^2} \right) L &= \end{aligned}$$

queda

$$-ik_0 W^2 \frac{\partial L}{\partial \zeta} + \frac{\partial^2 L}{\partial \rho^2} + \left(\frac{1}{\rho} - \rho \left[iQ W^2 - ik_0 W \frac{\partial W}{\partial z} \right] \right) \frac{\partial L}{\partial \rho} + \left(4p + 2(n \pm 1) - \frac{(n \pm 1)^2}{\rho^2} \right) L = 0$$

Ahora se eligen las siguientes condiciones

$$\text{Choose this} \rightarrow \begin{cases} iW^2 Q - iWk_0 \frac{\partial W}{\partial z} = 2 \\ L(\rho, \zeta) = L(\rho) \neq L(\zeta) \end{cases}$$

y entonces la ecuación anterior se simplifica y queda

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \rho^2} + \left(\frac{1}{\rho} - 2\rho \right) \frac{\partial L}{\partial \rho} + \left(4p + 2(n \pm 1) - \frac{(n \pm 1)^2}{\rho^2} \right) L = 0$$

Se aplica otro cambio de variable ahora dado por

$$\tau = \rho^2 \rightarrow \text{Change of variable} \quad (17)$$

Cálculos Auxiliares

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \rho} &= \frac{\partial L}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial \rho} \\ &= \frac{\partial L}{\partial \tau} 2\rho \\ &= 2\sqrt{\tau} \frac{\partial L}{\partial \tau} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 L}{\partial \rho^2} &= \frac{\partial \left(\frac{\partial L}{\partial \rho} \right)}{\partial \rho} \\ &= \frac{\partial \left(\frac{\partial L}{\partial \rho} \right)}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial \rho} \\ &= 2\sqrt{\tau} \frac{\partial \left(2\sqrt{\tau} \frac{\partial L}{\partial \tau} \right)}{\partial \tau} \\ &= 4\sqrt{\tau} \left(\frac{1}{2\sqrt{\tau}} \frac{\partial L}{\partial \tau} + \sqrt{\tau} \frac{\partial^2 L}{\partial \tau^2} \right) \\ &= 4\tau \frac{\partial^2 L}{\partial \tau^2} + 2 \frac{\partial L}{\partial \tau} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4\tau \frac{\partial^2 L}{\partial \tau^2} + 2 \frac{\partial L}{\partial \tau} + \left(\frac{1}{\sqrt{\tau}} - 2\sqrt{\tau} \right) 2\sqrt{\tau} \frac{\partial L}{\partial \tau} + \left(4p + 2(n \pm 1) - \frac{(n \pm 1)^2}{\tau} \right) L &= 0 \\ 4\tau \frac{\partial^2 L}{\partial \tau^2} + (4 - 4\tau) \frac{\partial L}{\partial \tau} + \left(4p + 2(n \pm 1) - \frac{(n \pm 1)^2}{\tau} \right) L &= \end{aligned}$$

por lo tanto la ecuación queda

$$4\tau \frac{\partial^2 L}{\partial \tau^2} + (4 - 4\tau) \frac{\partial L}{\partial \tau} + \left(4p + 2(n \pm 1) - \frac{(n \pm 1)^2}{\tau} \right) L = 0$$

Por último (sí, ya estamos terminando...) se aplica la sustitución

$$L(\tau) = \tau^{\frac{n \pm 1}{2}} L_p^{n \pm 1}(\tau) \quad (18)$$

por lo tanto la ecuación anterior se convierte en

$$\tau \frac{\partial^2 L_p^{n \pm 1}}{\partial \tau^2} + (1 + (n \pm 1) - \tau) \frac{\partial L_p^{n \pm 1}}{\partial \tau} + p L_p^{n \pm 1} = 0 \rightarrow \text{Laguerre's eq.}$$

y esto es una *ecuación de Laguerre asociada* cuya solución son los polinomios de Laguerre [4, 8.979]. Los polinomios de Laguerre son [4, sec. 8.97]

$$L_p^n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \frac{1}{p!} e^x x^{-n} \frac{d^p}{dx^p} (e^{-x} x^{p+n}) & \text{Rodrigues' formula} \\ \sum_{m=0}^p (-1)^m \binom{p+n}{p-m} \frac{x^m}{m!} & \end{cases} \quad (19)$$

El problema ya está resuelto, ya se tiene una respuesta. Ahora hay que hacer el camino de vuelta hasta obtener el campo eléctrico. Para ello comenzamos con (18), es decir

$$L(\tau) = \tau^{\frac{n\pm 1}{2}} L_p^{n\pm 1}(\tau)$$

y aplicamos el cambio de variable (17) para obtener

$$L(\rho) = (\rho^2)^{\frac{n\pm 1}{2}} L_p^{n\pm 1}(\rho^2)$$

Ahora usamos (16) y entonces

$$L(r, z) = \left(\frac{2r^2}{W^2(z)} \right)^{\frac{n\pm 1}{2}} L_p^{n\pm 1} \left(\frac{2r^2}{W^2(z)} \right)$$

Ahora se introduce esto en (14) y se obtiene

$$U_{\pm}(r, z) = \left(\frac{2r^2}{W^2(z)} \right)^{\frac{n\pm 1}{2}} L_p^{n\pm 1} \left(\frac{2r^2}{W^2(z)} \right) e^{-iQ(z)\frac{r^2}{2} - iP(z)}$$

A continuación introducimos esto en (10) y queda

$$T_{\pm}(r, z) = \left(\frac{\sqrt{2}r}{W(z)} \right)^{n\pm 1} L_p^{n\pm 1} \left(\frac{2r^2}{W^2(z)} \right) e^{-iQ(z)\frac{r^2}{2} - iP(z)} e^{-i \int_0^z k_0(\zeta) d\zeta}$$

Por último se reemplaza esto en las componentes del campo eléctrico usando primero (7) y luego (4). Lo que se obtiene finalmente es

Haz de Laguerre-Gauss vectorial - Campo eléctrico

$$\mathbf{E}(r, \phi, z) = E_0 \left(\frac{\sqrt{2}r}{W(z)} \right)^{n\pm 1} L_p^{n\pm 1} \left(\frac{2r^2}{W^2(z)} \right) e^{-iQ(z)\frac{r^2}{2} - iP(z)} e^{-i \int_0^z k_0(\zeta) d\zeta} \left\{ \begin{array}{l} \pm \hat{\mathbf{r}} \sin(n\phi) + \hat{\phi} \cos(n\phi) \\ \hat{\mathbf{r}} \cos(n\phi) \pm \hat{\phi} \sin(n\phi) \end{array} \right\} \quad (20)$$

que justamente es un haz de Laguerre-Gauss [10]. La notación $\left\{ \begin{array}{l} \pm \hat{\mathbf{r}} \sin(n\phi) + \hat{\phi} \cos(n\phi) \\ \hat{\mathbf{r}} \cos(n\phi) \pm \hat{\phi} \sin(n\phi) \end{array} \right\}$ indica las dos posibilidades distintas¹ que se obtienen si se hace la cuenta utilizando (7) (como se ha hecho) o (8). Recuérdese que el campo eléctrico con la dependencia temporal está dado por (3), es decir

$$\mathbf{E}(r, \phi, z, t) = \mathbf{E}(r, \phi, z) e^{i\omega t}$$

2. Densidad de momento angular de los haces vectoriales

Los haces de Laguerre-Gauss tienen la particularidad de ser haces que portan momento angular orbital [11]. Para evidenciar esto se puede calcular la densidad de momento angular \mathbf{j} dada por [6, eq. (8.34)]

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(\mathbf{r}) &= \langle \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \rangle \\ &= \mathbf{r} \times \langle \mathbf{g}(\mathbf{r}, t) \rangle \end{aligned} \quad (21)$$

donde \mathbf{r} es la posición y \mathbf{g} la densidad de momento lineal. $\langle \mathbf{g} \rangle$ es el promedio temporal de la densidad de momento lineal. Ésta última a su vez está dada por [12, eq. (15.50)]

$$\langle \mathbf{g}(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \rangle}{c^2} \quad (22)$$

donde \mathbf{S} es el vector de Poynting y está dado por [12, eqs. (1.137)], [7, eq. (6.109)]

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)) \quad (23)$$

¹Cuatro en total si se tienen en cuenta las combinaciones del signo \pm .

Por lo tanto la densidad de momento angular es

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2c^2} \mathbf{r} \times \text{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H})$$

El campo eléctrico \mathbf{E} está dado por (20) (agregando la dependencia temporal). El campo \mathbf{H} se puede obtener a partir de las ecuaciones de Maxwell (1)

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\frac{c}{\mu} \vec{\nabla} \times \mathbf{E}$$

Debido a que \mathbf{E} es armónico, también lo será \mathbf{H} . Es decir que

$$\mathbf{H}(r, \phi, z, t) = \mathbf{H}(r, \phi, z) e^{i\omega t}$$

por lo tanto la ecuación anterior se convierte en

$$\mathbf{H}(r, \phi, z) = \frac{ic}{\mu\omega} \vec{\nabla} \times \mathbf{E}(r, \phi, z) \quad (24)$$

donde $\mathbf{E}(r, \phi, z)$ está explícitamente dado por (20). Voy a llamar

$$Y_p^{n\pm 1}(r, z) = \left(\frac{\sqrt{2}r}{W(z)} \right)^{n\pm 1} L_p^{n\pm 1} \left(\frac{2r^2}{W^2(z)} \right) e^{-iQ(z)\frac{r^2}{2} - iP(z)} e^{-i \int_0^z k_0(\zeta) d\zeta}$$

de modo tal que el campo eléctrico es

$$\mathbf{E}(r, \phi, z) = E_0 Y_p^{n\pm 1}(r, z) \begin{Bmatrix} \pm \hat{\mathbf{r}} \sin(n\phi) + \hat{\boldsymbol{\phi}} \cos(n\phi) \\ \hat{\mathbf{r}} \cos(n\phi) \pm \hat{\boldsymbol{\phi}} \sin(n\phi) \end{Bmatrix} \hat{\mathbf{z}} \quad (25)$$

Introduciendo esta expresión para el campo eléctrico en (24)

Cálculos Auxiliares

Al expandir el rotor en cilíndricas se obtiene

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \mathbf{E} &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \frac{\partial E_\phi}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{r}} + \left(\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) \hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rE_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \phi} \right) \hat{\mathbf{z}} \\ E_z = 0 \rightarrow &= -\frac{\partial E_\phi}{\partial z} \hat{\mathbf{r}} + \frac{\partial E_r}{\partial z} \hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rE_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \phi} \right) \hat{\mathbf{z}} \checkmark \end{aligned}$$

Introduciendo el campo eléctrico dado por (25) se obtienen los siguientes términos

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_\phi}{\partial z} &= E_0 \frac{\partial Y_p^{n\pm 1}(r, z)}{\partial z} \begin{Bmatrix} \cos(n\phi) \\ \pm \sin(n\phi) \end{Bmatrix} \checkmark \\ \frac{\partial E_r}{\partial z} &= E_0 \frac{\partial Y_p^{n\pm 1}(r, z)}{\partial z} \begin{Bmatrix} \pm \sin(n\phi) \\ \cos(n\phi) \end{Bmatrix} \checkmark \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(rE_\phi)}{\partial r} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r E_0 Y_p^{n\pm 1}(r, z) \begin{Bmatrix} \cos(n\phi) \\ \pm \sin(n\phi) \end{Bmatrix} \right) \\ &= \frac{E_0}{r} \left[Y_p^{n\pm 1}(r, z) + r \frac{\partial Y_p^{n\pm 1}(r, z)}{\partial r} \right] \begin{Bmatrix} \cos(n\phi) \\ \pm \sin(n\phi) \end{Bmatrix} \\ &= E_0 \left[\frac{Y_p^{n\pm 1}(r, z)}{r} + \frac{\partial Y_p^{n\pm 1}(r, z)}{\partial r} \right] \begin{Bmatrix} \cos(n\phi) \\ \pm \sin(n\phi) \end{Bmatrix} \checkmark \\ \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \phi} &= n E_0 \frac{Y_p^{n\pm 1}(r, z)}{r} \begin{Bmatrix} \pm \cos(n\phi) \\ -\sin(n\phi) \end{Bmatrix} \checkmark \end{aligned}$$

por lo tanto, juntando todo,

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \times \mathbf{E} &= -E_0 \frac{\partial Y_p^{n\pm 1}(r, z)}{\partial z} \begin{Bmatrix} \cos(n\phi) \\ \pm \sin(n\phi) \end{Bmatrix} \hat{\mathbf{r}} + E_0 \frac{\partial Y_p^{n\pm 1}(r, z)}{\partial z} \begin{Bmatrix} \pm \sin(n\phi) \\ \cos(n\phi) \end{Bmatrix} \hat{\boldsymbol{\phi}} + \dots \\
 &\dots + E_0 \left[\frac{Y_p^{n\pm 1}(r, z)}{r} + \frac{\partial Y_p^{n\pm 1}(r, z)}{\partial r} \right] \begin{Bmatrix} \cos(n\phi) \\ \pm \sin(n\phi) \end{Bmatrix} \hat{\mathbf{z}} - nE_0 \frac{Y_p^{n\pm 1}(r, z)}{r} \begin{Bmatrix} \pm \cos(n\phi) \\ -\sin(n\phi) \end{Bmatrix} \hat{\mathbf{z}} \\
 &= E_0 \frac{\partial Y_p^{n\pm 1}(r, z)}{\partial z} \begin{Bmatrix} -\hat{\mathbf{r}} \cos(n\phi) \pm \hat{\boldsymbol{\phi}} \sin(n\phi) \\ \mp \hat{\mathbf{r}} \sin(n\phi) + \hat{\boldsymbol{\phi}} \cos(n\phi) \end{Bmatrix} + \dots \\
 &\dots + \hat{\mathbf{z}} E_0 \left(\frac{\partial Y_p^{n\pm 1}(r, z)}{\partial r} \begin{Bmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{Bmatrix} + \frac{Y_p^{n\pm 1}(r, z)}{r} \begin{Bmatrix} 1 \mp n \\ \pm 1 + n \end{Bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \cos(n\phi) \\ \sin(n\phi) \end{Bmatrix} \checkmark
 \end{aligned}$$

se obtiene

Haz de Laguerre-Gauss vectorial - Campo magnético

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}(r, \phi, z) &= \frac{ic}{\mu\omega} E_0 \frac{\partial Y_p^{n\pm 1}(r, z)}{\partial z} \begin{Bmatrix} -\hat{\mathbf{r}} \cos(n\phi) \pm \hat{\boldsymbol{\phi}} \sin(n\phi) \\ \mp \hat{\mathbf{r}} \sin(n\phi) + \hat{\boldsymbol{\phi}} \cos(n\phi) \end{Bmatrix} + \dots \\
 &\dots + \hat{\mathbf{z}} \frac{ic}{\mu\omega} E_0 \left(\frac{\partial Y_p^{n\pm 1}(r, z)}{\partial r} \begin{Bmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{Bmatrix} + \frac{Y_p^{n\pm 1}(r, z)}{r} \begin{Bmatrix} 1 \mp n \\ \pm 1 + n \end{Bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \cos(n\phi) \\ \sin(n\phi) \end{Bmatrix} \quad (26)
 \end{aligned}$$

Ahora ya se puede calcular el vector de Poynting a partir de (23) reemplazando las expresiones halladas para \mathbf{E} y \mathbf{H} . Esto es

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{S} \rangle(r, \phi, z) &= \frac{\text{Re}(\mathbf{E}(r, \phi, z, t) \times \mathbf{H}^*(r, \phi, z, t))}{2} \\
 &= \frac{\text{Re}(\mathbf{E}(r, \phi, z) e^{i\omega t} \times \mathbf{H}^*(r, \phi, z) e^{-i\omega t})}{2}
 \end{aligned}$$

y luego de hacer esta cuenta

Cálculos Auxiliares

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{r}} & \hat{\boldsymbol{\phi}} & \hat{\mathbf{z}} \\ E_r & E_\phi & 0 \\ H_r^* & H_\phi^* & H_z^* \end{vmatrix} \\
 &= \hat{\mathbf{r}} E_\phi H_z^* - \hat{\boldsymbol{\phi}} E_r H_z^* + \hat{\mathbf{z}} (E_r H_\phi^* - E_\phi H_r^*) \\
 &=
 \end{aligned}$$

Reemplazando las componentes de \mathbf{E} con (25) y las de \mathbf{H} con (26) se obtiene lo siguiente:

■ Primer término:

$$\begin{aligned}
 E_\phi H_z^* &= \left[E_0 Y_p^{n\pm 1} \begin{Bmatrix} \cos(n\phi) \\ \pm \sin(n\phi) \end{Bmatrix} \right] \cdot \left[\frac{-ic}{\mu\omega} E_0 \left(\frac{\partial (Y_p^{n\pm 1})^*}{\partial r} \begin{Bmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{Bmatrix} + \frac{(Y_p^{n\pm 1})^*}{r} \begin{Bmatrix} 1 \mp n \\ \pm 1 + n \end{Bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \cos(n\phi) \\ \sin(n\phi) \end{Bmatrix} \right] \checkmark \\
 &= -\frac{ic}{\mu\omega} E_0^2 Y_p^{n\pm 1} \left(\frac{\partial (Y_p^{n\pm 1})^*}{\partial r} \begin{Bmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{Bmatrix} + \frac{(Y_p^{n\pm 1})^*}{r} \begin{Bmatrix} 1 \mp n \\ \pm 1 + n \end{Bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \cos^2(n\phi) \\ \pm \sin^2(n\phi) \end{Bmatrix} \\
 &= -\frac{ic}{\mu\omega} E_0^2 Y_p^{n\pm 1} \left(\frac{\partial (Y_p^{n\pm 1})^*}{\partial r} \begin{Bmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{Bmatrix} + \frac{(Y_p^{n\pm 1})^*}{r} \begin{Bmatrix} 1 \mp n \\ \pm 1 + n \end{Bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos^2(n\phi) \\ \sin^2(n\phi) \end{Bmatrix} \\
 &= \frac{ic}{\mu\omega} E_0^2 Y_p^{n\pm 1} \left(\frac{\partial (Y_p^{n\pm 1})^*}{\partial r} \begin{Bmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{Bmatrix} + \frac{(Y_p^{n\pm 1})^*}{r} \begin{Bmatrix} 1 \mp n \\ \pm 1 + n \end{Bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} -1 \\ \mp 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos^2(n\phi) \\ \sin^2(n\phi) \end{Bmatrix} \\
 &= \frac{ic}{\mu\omega} E_0^2 Y_p^{n\pm 1} \left(-\frac{\partial (Y_p^{n\pm 1})^*}{\partial r} + \frac{(Y_p^{n\pm 1})^*}{r} \begin{Bmatrix} -1 \pm n \\ -1 \mp n \end{Bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \cos^2(n\phi) \\ \sin^2(n\phi) \end{Bmatrix} \\
 &= \frac{ic}{\mu\omega} E_0^2 \left(-Y_p^{n\pm 1} \frac{\partial (Y_p^{n\pm 1})^*}{\partial r} - \frac{|Y_p^{n\pm 1}|^2}{r} \begin{Bmatrix} 1 \mp n \\ 1 \pm n \end{Bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \cos^2(n\phi) \\ \sin^2(n\phi) \end{Bmatrix} \checkmark
 \end{aligned}$$

■ Segundo término

$$\begin{aligned}
 E_r H_z^* &= \left[E_0 Y_p^{n\pm 1} \begin{Bmatrix} \pm \sin(n\phi) \\ \cos(n\phi) \end{Bmatrix} \right] \cdot \left[\frac{-ic}{\mu\omega} E_0 \left(\frac{\partial (Y_p^{n\pm 1})^*}{\partial r} \begin{Bmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{Bmatrix} + \frac{(Y_p^{n\pm 1})^*}{r} \begin{Bmatrix} 1 \mp n \\ \pm 1 + n \end{Bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \cos(n\phi) \\ \sin(n\phi) \end{Bmatrix} \right] \checkmark \\
 &= -\frac{ic}{\mu\omega} E_0^2 Y_p^{n\pm 1} \left(\frac{\partial (Y_p^{n\pm 1})^*}{\partial r} \begin{Bmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{Bmatrix} + \frac{(Y_p^{n\pm 1})^*}{r} \begin{Bmatrix} 1 \mp n \\ \pm 1 + n \end{Bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \pm \cos(n\phi) \sin(n\phi) \\ \cos(n\phi) \sin(n\phi) \end{Bmatrix} \\
 &= -\frac{ic}{\mu\omega} E_0^2 Y_p^{n\pm 1} \left(\frac{\partial (Y_p^{n\pm 1})^*}{\partial r} \begin{Bmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{Bmatrix} + \frac{(Y_p^{n\pm 1})^*}{r} \begin{Bmatrix} 1 \mp n \\ \pm 1 + n \end{Bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \pm 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\sin(2n\phi)}{2} \\
 &= \frac{ic}{\mu\omega} E_0^2 Y_p^{n\pm 1} \left(\frac{\partial (Y_p^{n\pm 1})^*}{\partial r} \begin{Bmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{Bmatrix} + \frac{(Y_p^{n\pm 1})^*}{r} \begin{Bmatrix} 1 \mp n \\ \pm 1 + n \end{Bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \mp 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \frac{\sin(2n\phi)}{2} \\
 &= \frac{ic}{\mu\omega} E_0^2 Y_p^{n\pm 1} \left(\mp \frac{\partial (Y_p^{n\pm 1})^*}{\partial r} + \frac{(Y_p^{n\pm 1})^*}{r} \begin{Bmatrix} \mp 1 + n \\ \mp 1 - n \end{Bmatrix} \right) \frac{\sin(2n\phi)}{2} \\
 &= \frac{ic}{\mu\omega} E_0^2 Y_p^{n\pm 1} (\pm 1) (\pm 1) \left(\mp \frac{\partial (Y_p^{n\pm 1})^*}{\partial r} - \frac{(Y_p^{n\pm 1})^*}{r} \begin{Bmatrix} \pm 1 - n \\ \pm 1 + n \end{Bmatrix} \right) \frac{\sin(2n\phi)}{2} \\
 &= \pm \frac{ic}{\mu\omega} E_0^2 Y_p^{n\pm 1} \left(-\frac{\partial (Y_p^{n\pm 1})^*}{\partial r} - \frac{(Y_p^{n\pm 1})^*}{r} \begin{Bmatrix} 1 \mp n \\ 1 \pm n \end{Bmatrix} \right) \frac{\sin(2n\phi)}{2} \\
 &= \pm \frac{ic}{\mu\omega} E_0^2 \left(-Y_p^{n\pm 1} \frac{\partial (Y_p^{n\pm 1})^*}{\partial r} - \frac{|Y_p^{n\pm 1}|^2}{r} \begin{Bmatrix} 1 \mp n \\ 1 \pm n \end{Bmatrix} \right) \frac{\sin(2n\phi)}{2} \checkmark
 \end{aligned}$$

■ Tercer término

$$\begin{aligned}
 E_r H_\phi^* &= \left[E_0 Y_p^{n\pm 1} \begin{Bmatrix} \pm \sin(n\phi) \\ \cos(n\phi) \end{Bmatrix} \right] \cdot \left[\frac{-ic}{\mu\omega} E_0 \frac{\partial (Y_p^{n\pm 1})^*}{\partial z} \begin{Bmatrix} \pm \sin(n\phi) \\ \cos(n\phi) \end{Bmatrix} \right] \checkmark \\
 &= -\frac{ic}{\mu\omega} E_0^2 Y_p^{n\pm 1} \frac{\partial (Y_p^{n\pm 1})^*}{\partial z} \begin{Bmatrix} \sin^2(n\phi) \\ \cos^2(n\phi) \end{Bmatrix} \checkmark
 \end{aligned}$$

■ Cuarto término

$$\begin{aligned}
 E_\phi H_r^* &= \left[E_0 Y_p^{n\pm 1} \begin{Bmatrix} \cos(n\phi) \\ \pm \sin(n\phi) \end{Bmatrix} \right] \cdot \left[\frac{-ic}{\mu\omega} E_0 \frac{\partial (Y_p^{n\pm 1})^*}{\partial z} \begin{Bmatrix} -\cos(n\phi) \\ \mp \sin(n\phi) \end{Bmatrix} \right] \checkmark \\
 &= \frac{ic}{\mu\omega} E_0^2 Y_p^{n\pm 1} \frac{\partial (Y_p^{n\pm 1})^*}{\partial z} \begin{Bmatrix} \cos^2(n\phi) \\ \sin^2(n\phi) \end{Bmatrix} \checkmark
 \end{aligned}$$

Haz de Laguerre-Gauss vectorial - Densidad de momento angular de una única componente

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{iE_0^2}{\mu\omega c} \left(F_p^{n\pm 1}(r, z) \frac{(\pm \hat{\mathbf{r}}z \mp \hat{\mathbf{z}}r) \frac{\sin(2n\phi)}{2} + \hat{\phi} z \begin{Bmatrix} \cos^2(n\phi) \\ \sin^2(n\phi) \end{Bmatrix}}{r} + \hat{\phi} G_p^{n\pm 1}(r, z) \right)$$

$$\text{donde } \begin{cases} F_p^{n\pm 1}(r, z) \stackrel{\text{def}}{=} -r Y_p^{n\pm 1} \frac{\partial (Y_p^{n\pm 1})^*}{\partial r} - |Y_p^{n\pm 1}|^2 \begin{Bmatrix} 1 \mp n \\ 1 \pm n \end{Bmatrix} \\ G_p^{n\pm 1}(r, z) \stackrel{\text{def}}{=} r Y_p^{n\pm 1} \frac{\partial (Y_p^{n\pm 1})^*}{\partial z} \end{cases}.$$

En este resultado es fácil ver que el momento angular neto para una superficie de z constante, $\int dr \int d\phi \mathbf{j}$, es nulo. Para obtener un momento angular neto distinto de cero se deben considerar los haces de Laguerre-Gauss escalares, que se desarrollarán en las próximas secciones. Estos haces pueden obtenerse, por ejemplo, haciendo pasar un haz vectorial por un polarizador lineal. En este caso todos los efectos de la polarización se anulan y se obtiene una onda con una única polarización. En consecuencia se puede dar un tratamiento escalar y, como se verá a continuación, en este caso el momento angular neto es distinto de cero.

3. Haces de Laguerre-Gauss escalares

Si bien las ondas electromagnéticas poseen un carácter vectorial, existe toda una rama de la óptica que trata a estas manifestaciones ondulatorias como un fenómeno de naturaleza escalar. Esto es posible en una región sin cargas ni corrientes libres. Bajo estas condiciones las ondas electromagnéticas se pueden representar en forma rigurosa mediante una onda escalar [5].

En el caso de los haces de Laguerre-Gauss existen haces escalares dados por la siguiente expresión [11, eq. (1)], [8, eq. (12.21)], [9, eq. (64)]

Haz de Laguerre-Gauss escalar

$$\text{LG}_{p\ell} = \frac{\Xi}{W(z)} \left(\frac{\sqrt{2}r}{W(z)} \right)^{|\ell|} L_p^{|\ell|} \left(\frac{2r^2}{W^2(z)} \right) e^{-\frac{r^2}{W^2(z)} + i \frac{k_0 r^2 z}{2(z^2 + z_R^2)} - i(2p + |\ell| + 1) \tan^{-1}\left(\frac{z}{z_R}\right)} e^{i\ell\phi} \quad (27)$$

donde Ξ es la amplitud, $W(z) = W_0 \sqrt{\frac{z^2 + z_R^2}{z^2}}$ es el radio del haz siendo z_R el *Rayleigh range*, $L_p^{|\ell|}(x)$ son los polinomios asociados de Laguerre dados por (19), $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ es el índice radial y $\ell \in \mathbb{Z}$ indica el modo azimutal [9, pag. 647].

Nota Se suele usar $\Xi = \sqrt{\frac{2p!}{\pi(p+|\ell|)!}}$ como constante de normalización de modo tal que los modos estén normalizados en el plano transversal según $\iint dx dy |\text{LG}_{p\ell}|^2 = 1$ [8, sec. 12.3.2].

Los haces de Laguerre-Gauss escalares portan un momento angular orbital (OAM) por tener una fase helicoidal dada por el término $e^{i\ell\phi}$ sin importar la distribución radial del haz [11].

3.1. Distribución de intensidad y de fase de los haces de Laguerre-Gauss

Para comenzar a entender estos haces dados por (27), cuya expresión no es para nada trivial, es conveniente visualizar algunos ejemplos gráficos. Lo primero que se ha de notar es que la distribución de intensidad posee simetría cilíndrica. Además a medida que se aumenta ℓ la intensidad se distribuye en valores más grandes de r , en tanto que aumentar p aumenta la cantidad de picos de intensidad radiales. En la figura 1 se pueden visualizar algunos ejemplos.

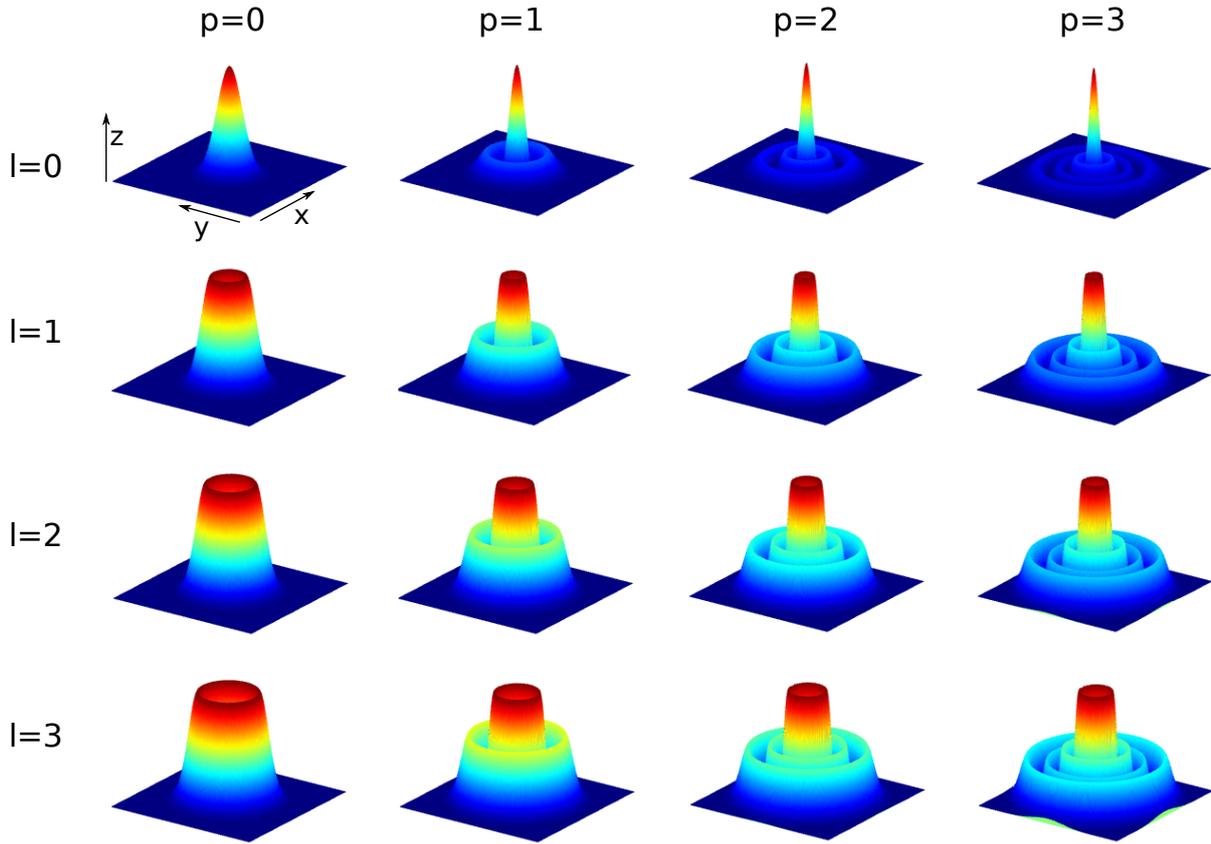


Figura 1: Distribuciones de intensidad para algunos valores de p y ℓ de los haces de Laguerre-Gauss escalares.

El aspecto más importante de estos haces es su distribución de fase, la cual les brinda la característica de portar momento angular [11]. La distribución de fase se caracteriza por ser helicoidal, es decir que las superficies de fase constante forman hélices (salvo para $\ell = 0$ que se tienen ondas planas). El número de “aspas” de las hélices está determinado por $|\ell|$, y el sentido de giro por el signo de ℓ . La relación con el momento angular, como se verá más adelante, es que la cantidad de momento angular se relaciona con $|\ell|$ y su orientación (a lo largo de \hat{z}) con el signo de ℓ .

En la figura (2) se pueden visualizar cuatro gráficos en los que se muestra tanto la intensidad como la fase para el plano $z = 0$ de estos haces. Sobre el gráfico de fase se ha añadido una flecha que indica el sentido de giro como así también se ha superpuesto el polinomio de Laguerre correspondiente que da origen a los quiebres de fase (debido al cambio de signo de este polinomio). En el apéndice A se adjunta el código utilizado para realizar estos gráficos.

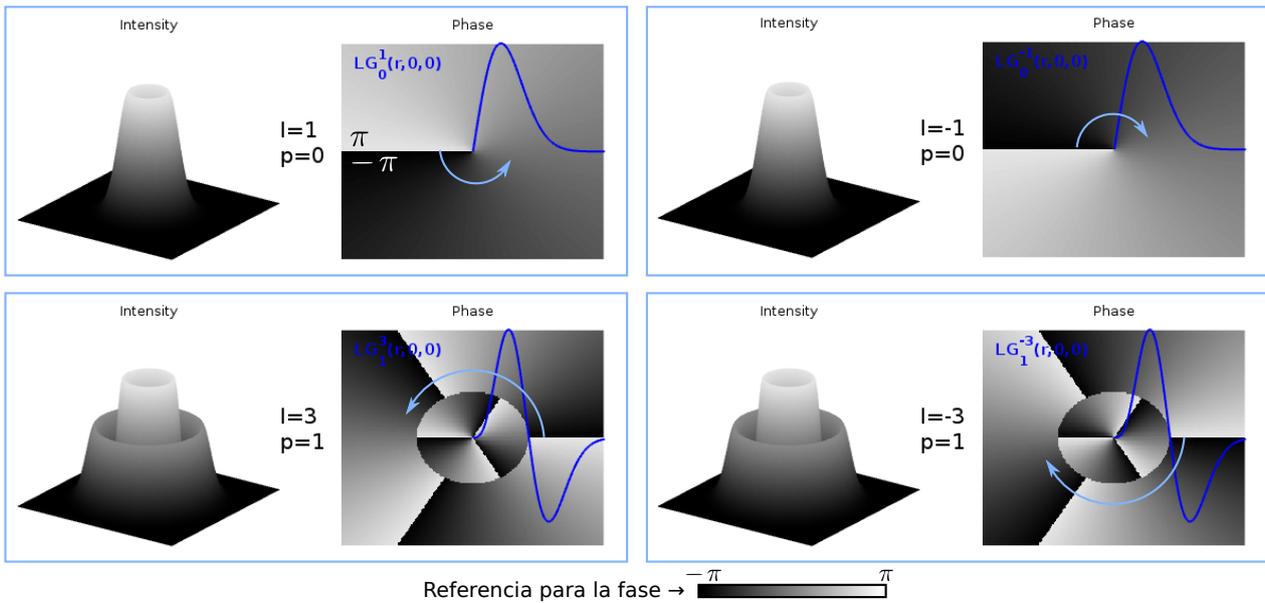


Figura 2: Gráficos de intensidad y fase para haces escalares de Laguerre-Gauss (27). Se han graficado los perfiles de intensidad y fase en el plano $z = 0$. En azul sobre los gráficos de fase se ha añadido la expresión (19) evaluada en $(r, 0, 0)$. Las flechas celestes sobre el gráfico de fase indican el sentido en que ésta crece.

En los gráficos de la figura 2 se ha indicado con una flecha sobre el gráfico de fase el sentido en que ésta crece. Como se puede ver los modos con $\ell > 0$ poseen un sentido de incremento de fase mientras que los modos con $\ell < 0$ poseen el inverso. Además se puede visualizar que los puntos en los que existen singularidades de fase poseen amplitud nula.

Otras bases para haces paraxiales...

Es interesante notar que los modos de Laguerre-Gauss dados por (27) forman una base para la representación de haces paraxiales^a y que no son la única base posible. Existen otras bases posibles para representar este tipo de haces como la base de Hermite-Gauss y que pueden relacionarse con la base de Laguerre-Gauss [2]. Los haces de Laguerre-Gauss forman una base conveniente para haces paraxiales que portan momento angular. Se pueden obtener otras bases, como la base de Hermite-Gauss, realizando una combinación lineal de los haces de Laguerre-Gauss [11]. Los haces de Hermite-Gauss no portan momento angular y su fase no es helicoidal. Entonces, considerando el hecho de que los haces de Laguerre-Gauss portan un momento angular cuyo sentido depende del signo de ℓ , es razonable pensar que un haz compuesto por una combinación lineal de $LG_{\ell,p}$ y $LG_{-\ell,p}$ con la misma proporción (es decir ℓ opuesto en uno y en el otro) va a tener un momento angular nulo y resultará entonces, en particular, en un elemento de la base de Hermite-Gauss. En la figura 3 se muestra un ejemplo (el gráfico se realizó con el código del apéndice A). Como se puede ver la fase ya no tiene un carácter helicoidal (lo cual indica que el OAM es nulo) y la distribución de amplitudes ya no posee simetría cilíndrica.

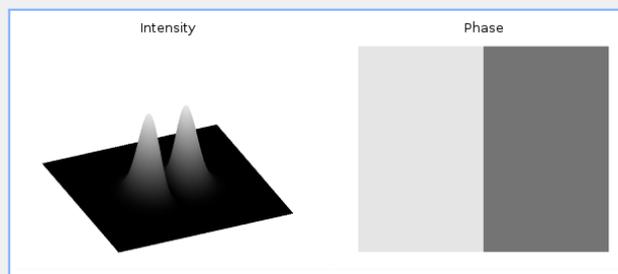


Figura 3: Modo de Hermite-Gauss $HG_{0,1}$ obtenido como combinación lineal de los modos de Laguerre-Gauss $LG_{0,1} + LG_{0,-1}$.

^aEs decir, haces que resuelven la ecuación de Helmholtz bajo la aproximación paraxial.

4. Momento angular del haz escalar

Para una onda electromagnética representada por una función escalar de la forma

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}) e^{ikf(\mathbf{r})} e^{-i\omega t} \quad \psi, f \in \mathbb{R} \quad (28)$$

se satisface que la densidad de momento lineal \mathbf{g} está dada por [5]

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\mathbf{r}) &= \frac{k^2}{4\pi\mu_0} \psi^2 \vec{\nabla} f \\ &= \kappa \psi^2 \vec{\nabla} f \\ &= \frac{\kappa}{k} |\Psi|^2 \vec{\nabla} \arg(\Psi) \end{aligned}$$

No es difícil verificar que los haces de Laguerre-Gauss escalares dados por (27) son de la forma (28) con lo cual se tiene que la densidad de momento lineal \mathbf{g} es

$$\mathbf{g} = \frac{\kappa}{k_0} |\text{LG}_{p,\ell}|^2 \vec{\nabla} \arg(\text{LG}_{p,\ell})$$

De esta forma se puede obtener la densidad de momento angular

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= \mathbf{r} \times \mathbf{g} \\ &= \frac{\kappa}{k_0} |\text{LG}_{p,\ell}|^2 \mathbf{r} \times \vec{\nabla} \arg(\text{LG}_{p,\ell}) \end{aligned}$$

Haciendo las cuentas

Cálculos Auxiliares

Los haces de Laguerre-Gauss escalares dados por (27) se pueden expresar como

$$\begin{aligned} \text{LG}_{p\ell} &= \frac{\Xi}{W(z)} \left(\frac{\sqrt{2}r}{W(z)} \right)^{|\ell|} L_p^{|\ell|} \left(\frac{2r^2}{W^2(z)} \right) e^{-\frac{r^2}{W^2(z)} + i \frac{k_0 r^2 z}{2(z^2 + z_R^2)} - i(2p + |\ell| + 1) \tan^{-1}\left(\frac{z}{z_R}\right)} e^{i\ell\phi} \\ &= \frac{\Xi}{W(z)} \left(\frac{\sqrt{2}r}{W(z)} \right)^{|\ell|} L_p^{|\ell|} \left(\frac{2r^2}{W^2(z)} \right) e^{-\frac{r^2}{W^2(z)}} e^{ik_0 \left(\frac{r^2 z}{2(z^2 + z_R^2)} - \frac{2p + |\ell| + 1}{k_0} \tan^{-1}\left(\frac{z}{z_R}\right) + \frac{\ell}{k_0} \phi \right)} \end{aligned}$$

por lo tanto las funciones $\psi(\mathbf{r})$ y $f(\mathbf{r})$ que definen la amplitud y fase, de acuerdo con (28), son

$$\begin{cases} \psi(r, \phi, z) = \frac{\Xi}{W(z)} \left(\frac{\sqrt{2}r}{W(z)} \right)^{|\ell|} L_p^{|\ell|} \left(\frac{2r^2}{W^2(z)} \right) e^{-\frac{r^2}{W^2(z)}} \\ f(r, \phi, z) = \frac{r^2 z}{2(z^2 + z_R^2)} - \frac{2p + |\ell| + 1}{k_0} \tan^{-1}\left(\frac{z}{z_R}\right) + \frac{\ell}{k_0} \phi \end{cases}$$

Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_0} \vec{\nabla} \arg(\text{LG}_{p\ell}) &= \vec{\nabla} f \\ &= \left(\hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\phi}}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{r^2 z}{2(z^2 + z_R^2)} - \frac{2p + |\ell| + 1}{k_0} \tan^{-1}\left(\frac{z}{z_R}\right) + \frac{\ell}{k_0} \phi \right) \\ &\quad \vdots \quad \text{Computadora} \dots \\ &= \hat{\mathbf{r}} \frac{rz}{z^2 + z_R^2} + \hat{\phi} \frac{\ell}{k_0 r} + \hat{\mathbf{z}} \left(\frac{r^2 (z_R - z)(z_R + z)}{2(z^2 + z_R^2)^2} + \frac{2p + |\ell| + 1}{k_0 \left(z_R + \frac{z^2}{z_R}\right)} \right) \end{aligned}$$

La densidad de momento lineal viene dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= \frac{\kappa}{k_0} |\text{LG}_{p,\ell}|^2 \vec{\nabla} \arg(\text{LG}_{p,\ell}) \\ &= \Xi^2 \frac{\kappa}{W(z)} \left(\frac{2r^2}{W^2(z)} \right)^{|\ell|} \left[L_p^{|\ell|} \left(\frac{2r^2}{W^2(z)} \right) \right]^2 e^{-\frac{2r^2}{W^2(z)}} \dots \\ &\quad \dots \left[\hat{\mathbf{r}} \frac{rz}{z^2 + z_R^2} + \hat{\phi} \frac{\ell}{k_0 r} + \hat{\mathbf{z}} \left(\frac{r^2 (z_R - z)(z_R + z)}{2(z^2 + z_R^2)^2} + \frac{2p + |\ell| + 1}{k_0 \left(z_R + \frac{z^2}{z_R}\right)} \right) \right] \end{aligned}$$

se encuentra que la densidad de momento lineal de un haz escalar de Laguerre-Gauss dado por (27) es

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = \Xi^2 \frac{\kappa}{W(z)} \left(\frac{2r^2}{W^2(z)} \right)^{|\ell|} \left[L_p^{|\ell|} \left(\frac{2r^2}{W^2(z)} \right) \right]^2 e^{-\frac{2r^2}{W^2(z)}} \dots \left[\hat{\mathbf{r}} \frac{rz}{z^2 + z_R^2} + \hat{\phi} \frac{\ell}{k_0 r} + \hat{\mathbf{z}} \left(\frac{r^2 (z_R - z)(z_R + z)}{2(z^2 + z_R^2)^2} + \frac{2p + |\ell| + 1}{k_0 \left(z_R + \frac{z^2}{z_R} \right)} \right) \right] \quad (29)$$

En la figura 4 se pueden ver algunos gráficos de la densidad de momento lineal \mathbf{g} para distintos modos de Laguerre-Gauss escalares en el plano $z = 0$. Además se superpuso el perfil de intensidad correspondiente. Es evidente, al mirar estos gráficos, que los haces de Laguerre-Gauss portan un momento angular bien definido. En el apéndice B se lista el código utilizado para generar los gráficos de la figura 4.

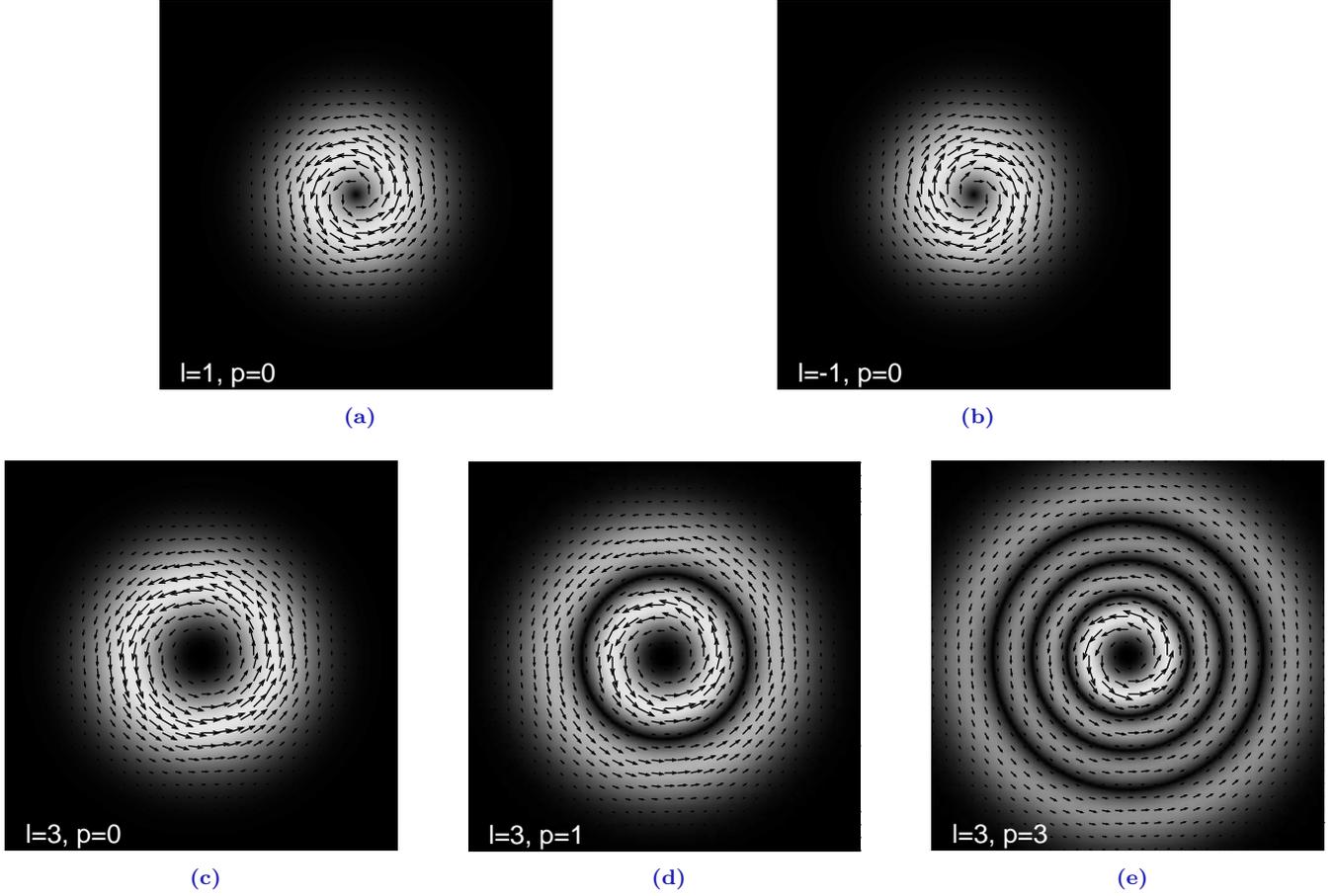


Figura 4: En cada gráfico se muestra en escala de grises el perfil de intensidad de un haz de Laguerre-Gauss dado por (27) (es decir $|LG_{p\ell}|^2$) para $z = 0$, $W_0 = 0,3$, $z_R = 1$, $k_0 = 1$. Las flechas representan la proyección sobre el plano xy de la densidad de momento lineal dada por (29).

Utilizando la expresión obtenida en (29) se puede calcular la densidad de momento angular sencillamente como $\mathbf{j} = \mathbf{r} \times \mathbf{g}$. Lo que se obtiene es

Cálculos Auxiliares

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= \mathbf{r} \times \mathbf{g} \\ &= -\hat{\mathbf{r}} z g_\phi + \hat{\phi} (z g_r - r g_z) + \hat{\mathbf{z}} r g_\phi \\ &= \Xi^2 \frac{\kappa}{W^2(z)} \left(\frac{\sqrt{2}r}{W(z)} \right)^{2|\ell|} \left[L_p^{|\ell|} \left(\frac{2r^2}{W^2(z)} \right) \right]^2 e^{-\frac{2r^2}{W^2(z)}} \dots \\ &\quad \dots \left[-\hat{\mathbf{r}} \frac{z\ell}{k_0 r} + \hat{\phi} \left(r \frac{z^2}{z^2 + z_R^2} - r^3 \frac{(z_R - z)(z_R + z)}{2(z^2 + z_R^2)^2} - \frac{(2p + |\ell| + 1)r}{k_0 \left(z_R + \frac{z^2}{z_R} \right)} \right) + \hat{\mathbf{z}} \frac{\ell}{k_0} \right] \end{aligned}$$

que la densidad de momento angular para un haz escalar de Laguerre-Gauss es

Densidad de momento angular para un haz escalar de Laguerre-Gauss

$$\mathbf{j} = \Xi^2 \frac{\kappa}{W^2(z)} \left(\frac{\sqrt{2}r}{W(z)} \right)^{2|\ell|} \left[L_p^{|\ell|} \left(\frac{2r^2}{W^2(z)} \right) \right]^2 e^{-\frac{2r^2}{W^2(z)}} \dots \left[-\hat{\mathbf{r}} \frac{z\ell}{k_0 r} + \hat{\boldsymbol{\phi}} \left(r \frac{z^2}{z^2 + z_R^2} - r^3 \frac{(z_R - z)(z_R + z)}{2(z^2 + z_R^2)^2} - \frac{(2p + |\ell| + 1)r}{k_0 \left(z_R + \frac{z^2}{z_R} \right)} \right) + \hat{\mathbf{z}} \frac{\ell}{k_0} \right] \quad (30)$$

A partir de la expresión anterior se puede calcular el momento angular total para una “rebanada” con $z = \text{constante}$, es decir

$$\mathbf{j}(z) = \int_{r=0}^{\infty} \int_{\phi=0}^{2\pi} \mathbf{j}(r, \phi, z) r dr d\phi$$

Es de esperarse que la conservación del momento angular conduzca a un resultado independiente de z . Esto se debe a que si el momento angular se conserva, éste no puede modificarse a medida que el haz se propaga sin ninguna interacción. Si se calcula el momento angular total (para un z fijo) se encontrará que

Cálculos Auxiliares

El cálculo del momento angular total (para un z fijo) puede expresarse como sigue:

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(z) &= \int_{r=0}^{\infty} \int_{\phi=0}^{2\pi} \mathbf{j}(r, \phi, z) r dr d\phi \\ &= \int_{r=0}^{\infty} \int_{\phi=0}^{2\pi} |\text{LG}_{p,\ell}(r, z)|^2 \left[\hat{\mathbf{r}} f(r, z) + \hat{\boldsymbol{\phi}} g(r, z) + \hat{\mathbf{z}} \frac{\ell}{k_0} \right] r dr d\phi \end{aligned}$$

donde f y g son dos funciones definidas por la expresión (30). Si se realiza primero la integración en ϕ se verá que la integral anterior se simplifica bastante ya que

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(z) &= \int_{r=0}^{\infty} |\text{LG}_{p,\ell}(r, z)|^2 \left[f(r, z) \int_{\phi=0}^{2\pi} \hat{\mathbf{r}} d\phi + g(r, z) \int_{\phi=0}^{2\pi} \hat{\boldsymbol{\phi}} d\phi + \hat{\mathbf{z}} \frac{\ell}{k_0} \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \right] r dr \\ &= \int_{r=0}^{\infty} |\text{LG}_{p,\ell}(r, z)|^2 \frac{2\pi\ell}{k_0} r dr \hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

Ahora se puede reemplazar la expresión de $\text{LG}_{p,\ell}$ dada por (27) por lo que

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(z) &= \frac{2\pi\ell}{k_0} \hat{\mathbf{z}} \int_0^{\infty} \Xi^2 \frac{\kappa}{W^2(z)} \left(\frac{2r^2}{W^2(z)} \right)^{|\ell|} \left[L_p^{|\ell|} \left(\frac{2r^2}{W^2(z)} \right) \right]^2 e^{-\frac{2r^2}{W^2(z)}} r dr \\ &= \frac{2\pi}{k_0} \Xi^2 \frac{\kappa\ell}{W^2(z)} \int_0^{\infty} \left(\frac{2r^2}{W^2(z)} \right)^{|\ell|} \left[L_p^{|\ell|} \left(\frac{2r^2}{W^2(z)} \right) \right]^2 e^{-\frac{2r^2}{W^2(z)}} r dr \hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

Si se realiza ahora el cambio de variable $x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2r^2}{W^2(z)}$ se obtiene finalmente

$$\mathbf{j}(z) = \Xi^2 \ell \frac{\pi}{2} \frac{\kappa}{k_0} \int_0^{\infty} x \left[L_p^{|\ell|}(x) \right]^2 e^{-x} dx \hat{\mathbf{z}}$$

Encontré en [este link](#)^a que

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-px} L_m^{\lambda}(ax) L_n^{\beta}(bx) dx = \frac{\Gamma(\alpha) (\lambda+1)_m (\beta+1)_n p^{-\alpha}}{m!n!} \sum_{j=0}^m \frac{(-m)_j (\alpha)_j}{(\lambda+1)_j j!} \left(\frac{a}{p}\right)^j \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k (j+\alpha)_k}{(\beta+1)_k k!} \left(\frac{b}{p}\right)^k$$

para $\text{Re}(\alpha) > 0$, $\text{Re}(p) > 0$, $m, n \in \mathbb{N}$. No sé qué significan los términos como $(\lambda+1)_m$, pero aparentemente tiene solución analítica ☺.

^a<http://functions.wolfram.com/Polynomials/LaguerreL3/21/02/01/0002/>

éste viene dado por

$$\mathbf{j}(z) = \Xi^2 \frac{\pi}{2} \frac{\kappa}{k_0} \ell \int_0^{\infty} x \left[L_p^{|\ell|}(x) \right]^2 e^{-x} dx \hat{\mathbf{z}}$$

Como se puede ver es independiente de z , confirmando así el resultado que se anticipó de que el momento angular se conserva a medida que el haz se propaga.

4.1. Combinaciones lineales de haces escalares de Laguerre-Gauss

La expresión (30) para la densidad de momento angular es válida para una única componente de Laguerre-Gauss de la forma dada por (27). Dados dos haces LG_{p_1, ℓ_1} y LG_{p_2, ℓ_2} , es de esperar que por, conservación del momento angular, la suma del momento angular *total* de cada haz debe coincidir con el momento angular *total* de la superposición. Sin embargo esto no es así para la densidad de momento angular ya que se espera que hayan fenómenos de interferencia. Esto es

$$\begin{cases} \mathbf{J}_{\text{total}} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2 & \rightarrow \text{Por conservación de } \mathbf{J} \\ \mathbf{j}_{\text{total}} \neq \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2 & \rightarrow \text{Producto de la interferencia} \end{cases}$$

siendo \mathbf{j}_i la densidad de momento angular dada por (30) y \mathbf{J}_i el momento angular total dado por $\mathbf{J} = \int d^3r \mathbf{j}(\mathbf{r})$. El motivo de que $\mathbf{j}_{\text{total}} \neq \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2$ es el mismo que el caso de la densidad de energía en el experimento de la doble rendija de Young: debido a que $\mathbf{j} \sim \text{LG}_{p, \ell}^2$ entonces hay que tener en cuenta los fenómenos de interferencia antes de calcular \mathbf{j} . Es por ello que si se desea obtener el momento angular total de una combinación lineal de haces, la expresión (30) no es válida. Habría que rehacer la cuenta tomando como punto de partida el campo total.

Con el uso de una computadora se pueden obtener resultados en forma numérica. Para ello se escribió un *script* de *Octave* con el que se realizó toda la cuenta en forma numérica para una combinación lineal arbitraria de haces de Laguerre-Gauss dados por (27). La densidad de momento lineal se calculó en forma numérica tomando el gradiente de la fase de la onda total, y luego el cálculo se realizó en forma idéntica al expuesto anteriormente. En el apéndice C se lista el código utilizado.

Además de utilizarse para poder visualizar los gráficos, el *script* permite calcular la suma de momento angular total realizando una suma numérica de cada uno de los valores discretos calculados.

En la figura 5 se pueden ver tres haces de la base de Laguerre-Gauss, $\text{LG}_{0,1}$, $\text{LG}_{0,2}$ y $\text{LG}_{0,3}$, a los cuales se les ha calculado en forma numérica el momento angular total, indicado como $\mathbf{L}_{\text{total}}$ al pie de cada gráfico. Este cálculo no tiene en cuenta los valores físicos de constantes como c ni el valor de π , debido a que al tratarse de constantes para todos los haces no aportan nada significativo al cálculo.

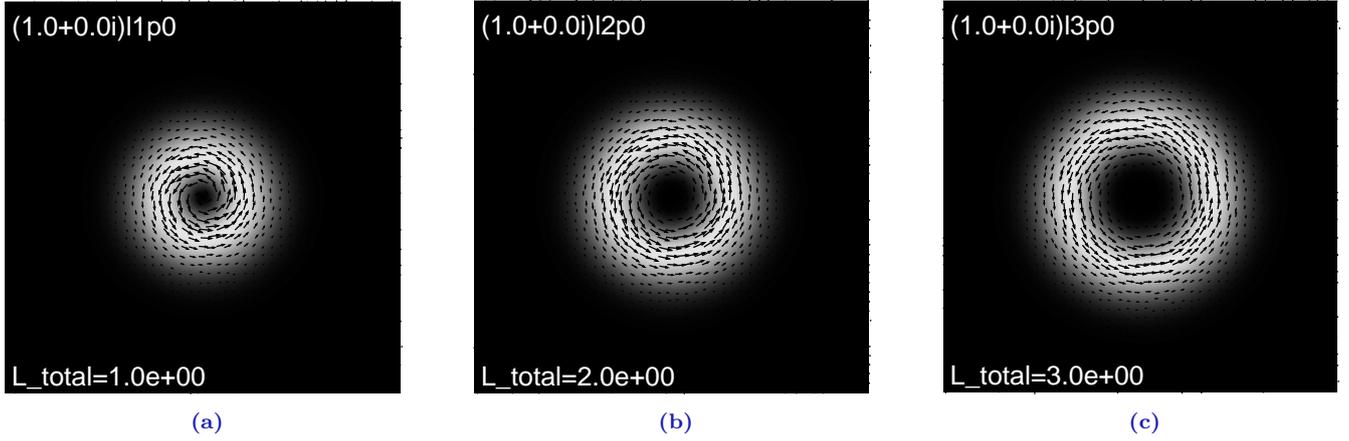


Figura 5: Elementos de la base de Laguerre-Gauss a los que se les ha calculado en forma numérica el momento angular total. En los gráficos se ve el gradiente de intensidad de cada onda como un gradiente de grises y las flechas indican la densidad de momento lineal g .

Utilizando estos tres elementos de la base de Laguerre-Gauss se ensayaron distintas combinaciones lineales, siempre en forma numérica. En la figura 6a se encuentra la combinación lineal $LG_{0,1} + LG_{0,2}$. Se puede apreciar que la interferencia da origen a un haz que ya no posee simetría cilíndrica. Sin embargo, como era de esperarse, el momento angular total es la suma de los dos anteriores. En la figura 6b se observa la misma combinación lineal pero introduciendo un desfase a la segunda componente, es decir $LG_{0,1} + iLG_{0,2}$. Nuevamente se observa que el momento angular total es la suma de los momentos angulares. Finalmente en la figura 6c se observa la combinación lineal en la que la primera componente posee $\ell = -1$, es decir $LG_{0,-1} + LG_{0,2}$. Nuevamente el momento angular total resulta ser la suma de los momentos angulares por separad, a pesar de que (en ninguno de estos casos) la densidad de momento angular es la suma de las densidades de momento angular.

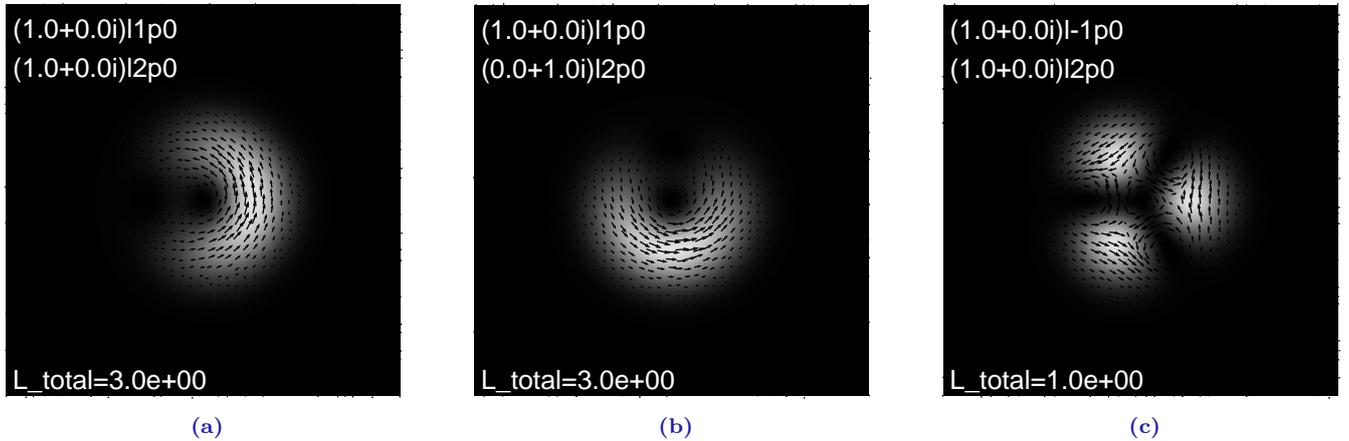


Figura 6: Distintas combinaciones lineales de los haces de las figuras 5a y 5b.

Se ensayaron combinaciones lineales de tres haces y se observó el mismo resultado: si bien la densidad de momento no es la suma de las densidades, el momento total resultante sí coincide con la suma de los momentos. En la figura 7a se muestra la combinación lineal $LG_{0,1} + LG_{0,2} + LG_{0,3}$ y como se puede ver el momento angular resultante es la suma de los tres individuales. Lo mismo ocurre para las combinaciones lineales $LG_{0,1} + LG_{0,2} + LG_{0,-3}$ y $LG_{0,1} + LG_{0,2} + iLG_{0,-3}$ mostradas en las figuras 7b y 7c. Si bien en estos últimos dos casos no se obtuvo $L_{total} \equiv 0$, se considera que los valores encontrados son ceros numéricos.

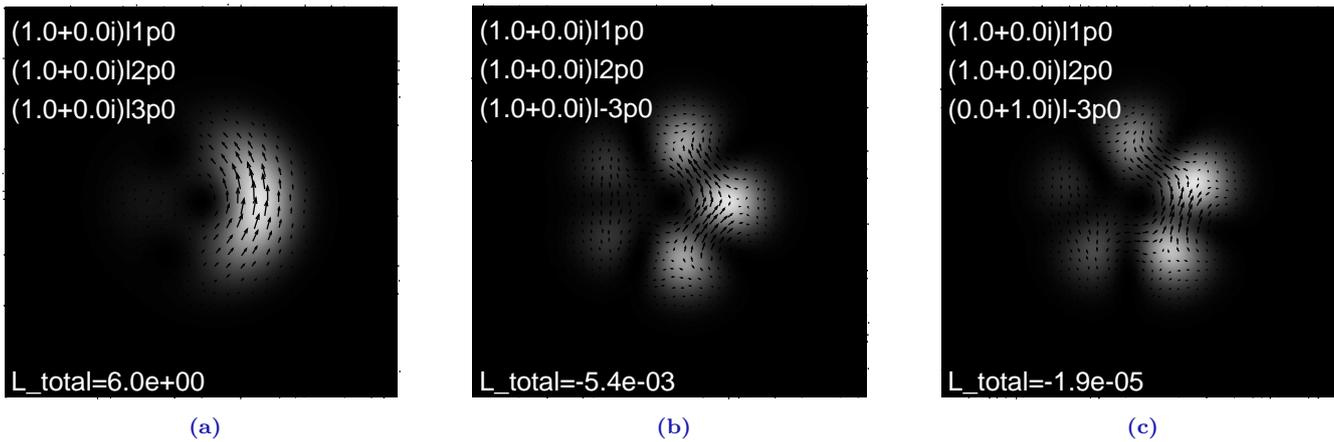


Figura 7: Combinaciones lineales de los haces de la figura 5.

Por último se deja registro de una combinación lineal en la que la amplitud de uno de los haces considerados fue el doble que la de los demás y lo que se observa es que el momento angular total, como se vio en forma rigurosa para el caso de una componente, no es lineal con la amplitud pero aún así la conservación, obviamente, no se rompe. En la figura 8a se puede ver un haz con $\ell = 2$ y $p = 0$ y una amplitud de 2. Como se puede ver el momento angular total es cuatro veces el valor para una amplitud unitaria. Esto se explica mediante el hecho de que \mathbf{j} es cuadrático en la amplitud (ver eq. (30)) por lo tanto si con una amplitud $\Xi = 1$ se tiene que el momento angular es 2 (ver fig. 5b) entonces para $\Xi = 2$ se espera que el momento angular sea $\Xi^2 = 4$ veces más grande, como se obtuvo en forma numérica en la figura 8a.

Por otro lado, la figura 8b muestra una combinación lineal en la que se utilizó este haz con amplitud 2 junto con los de las figuras 5a y 5c. En particular la combinación lineal es $LG_{0,1} + 2LG_{0,2} + iLG_{0,-3}$. El momento angular total que se obtuvo en forma numérica, como se puede ver al pie de la figura 8b, coincide con la suma de los momentos angulares de cada uno de los haces intervinientes en la combinación lineal.

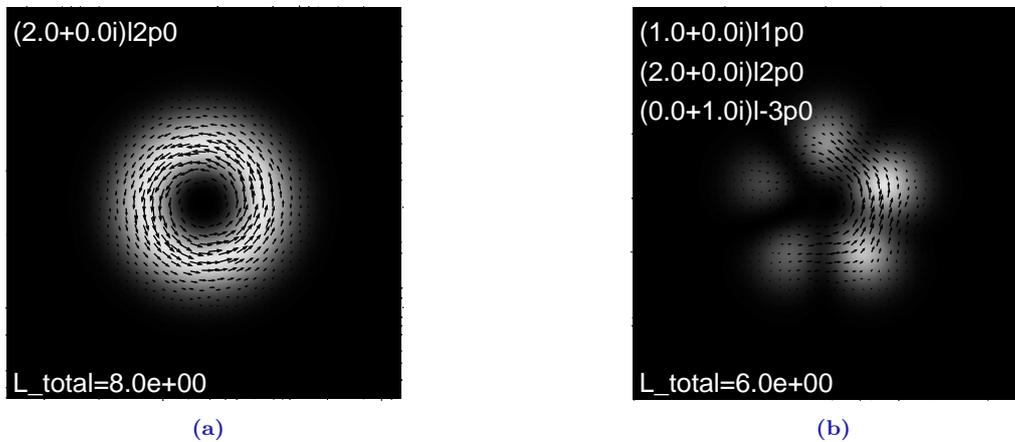


Figura 8: Gráficos que muestran la no linealidad del momento angular con la amplitud de la onda pero aún así la conservación se sigue satisfaciendo. (a) El mismo haz de la figura 5b pero con una amplitud de 2, se obtiene cuatro veces el momento angular total que en el caso con amplitud 1 (fig. 5b). (b) Una combinación lineal utilizando el haz de (a) en la que se sigue verificando la conservación del impulso angular total.

5. Conclusiones

Sobre lo realizado...

Se estudió la deducción rigurosa de los haces de Laguerre-Gauss vectoriales (campo eléctrico y campo magnético) a partir de las leyes fundamentales del electromagnetismo clásico: las ecuaciones de Maxwell. Se analizó en detalle la aproximación paraxial y se estudió cualitativamente su rango de validez.

Habiendo obtenido la expresión de los haces de Laguerre-Gauss vectoriales se calculó su densidad de momento angular a partir de primeros principios, y luego ésta se integró para obtener el momento angular total. Contrario a lo que se esperaba, se obtuvo que el momento angular total de estos haces es nulo. Se intentó recuperar el resultado esperado a partir de realizar

distintas combinaciones lineales de los haces de Laguerre-Gauss vectoriales pero ninguna de las ensayadas mostró tener un momento angular neto distinto de cero.

En vistas del resultado anterior se procedió a realizar un estudio de los haces de Laguerre-Gauss escalares, conocidos por portar un momento angular neto distinto de cero. Esta vez no se realizó una deducción rigurosa sino que se adoptó su expresión a partir de referencias de trabajos anteriores, citadas en el desarrollo del presente documento. Tomando como punto de partida esta expresión se realizó el cálculo riguroso de la densidad de momento angular de estos haces. Se estudió la conservación del momento angular total a medida que estos haces se propagan y se verificaron los resultados esperados.

Por último se realizó un estudio sobre la conservación del momento angular total en combinaciones lineales de haces de Laguerre-Gauss escalares. Para ello el procedimiento adoptado fue numérico, mediante cálculos con computadora. Si bien este tipo de análisis no permitió garantizar la conservación del momento angular en forma explícita para cualquier combinación lineal, ya que no se obtuvo una expresión matemática que así lo verifique, sí permitió verificar que en todos los casos particulares en los que indagó la conservación fue válida. Además permitió visualizar los campos vectoriales y de intensidad resultantes en cada caso de una manera muy versátil.

Sobre lo que no se pudo hacer...

Queda abierta la discusión sobre el momento angular de los haces vectoriales y su relación con los haces de Laguerre-Gauss escalares. Como se mencionó, se obtuvo el inesperado resultado de que los haces de Laguerre-Gauss vectoriales no portan un momento angular neto. Al menos no en la forma en que se los encontró en este trabajo.

A. Código utilizado para graficar los modos de Laguerre-Gauss escalares

En este apéndice se adjunta el código de *Octave 4.0.0* utilizado para generar los gráficos de los modos escalares de Laguerre-Gauss (fig. 2) y cualquier combinación lineal de igual peso entre ellos (fig. 3).

Script principal

```

1 clc
2 close all
3 clear all
4 more off % Esto es para que muestre los printf(), disp() y resultados a medida que
           los ejecuta y no todo junto al final
5 set(0,'defaultlinelength',2); % Setea el 'LineWidth' predeterminado en 2.
6 % ----- CONFIGURACIÓN GENERAL DE GRÁFICOS -----
7 TITLE_FONT_SIZE = 13;
8 AXIS_LABEL_FONT_SIZE = 10;
9 AXIS_TICKS_FONT_SIZE = 10;
10 COLORES = {[0 0 0], [1 0 0], [0 .7 0], [0 0 1], [1 .5 0], [0 .7 .7], [.7 0 .7]};
11 % TAMAÑO DE FIGURAS -----
12 X_mm = 200; % ancho de las imágenes en milímetros
13 PROPORCION = [1 0.34]; x_pixels = X_mm*3.779527559*PROPORCION(1); y_pixels =
           round(PROPORCION(2)*x_pixels);
14 % -----
15 w0 = 0.3;
16 zR = 1;
17 k0 = 1;
18 z = 0;
19 N_PUNTOS_MALLADO = 100e3;
20 x = linspace(-1,1,sqrt(N_PUNTOS_MALLADO))';
21 y = linspace(-1,1,sqrt(N_PUNTOS_MALLADO)/2)';
22 [xx, yy] = meshgrid(x, y);
23 phi = atan(yy./xx);
24 phi(find(xx<0 & yy>0)) += pi;
25 phi(find(xx<0 & yy<0)) -= pi;
26 n_componentes = input("Numero de componentes? \n-->");
27 for k = 1:n_componentes
28     disp(sprintf('Componente numero %i:', k));
29     l{k} = input('\Valor de l?');
30     p{k} = input('\Valor de p?');
31     if k == 1
32         EE = lg_mode(sqrt(xx.^2+yy.^2), phi, z, [w0, zR, p{k}, l{k}, k0]);
33     else
34         EE += lg_mode(sqrt(xx.^2+yy.^2), phi, z, [w0, zR, p{k}, l{k}, k0]);
35     end %if
36 end %for
37 figure('Position',[0,0,x_pixels,y_pixels]); hold on; clear("leyenda"); clear("graf
           ");
38 subplot(1, 2, 1); %
           -----
39 hold on;
40 title('Intensity', 'FontSize', TITLE_FONT_SIZE);
41 meshz(xx, yy, (abs(EE)./max(max(abs(EE))))).^2);
42 shading interp;
43 if n_componentes == 1
44     text(1, -1, .5, sprintf('l=%i\np=%i', l{1}, p{1}), 'FontSize', 20)
45 end %if
46 axis([-1, 1, -1, 1, 0, 1]);
47 axis off;
48 view([-1, -0.7, 0.7])
49 subplot(1, 2, 2); %
           -----

```

```

50 hold on;
51 title('Phase', 'FontSize', TITLE_FONT_SIZE);
52 argE = arg(EE);
53 imagesc(xx, yy, argE);
54 caxis([-pi, pi]);
55 if n_componentes == 1
56     color_asd = [.01 .01 .99];
57     eje_r = linspace(0, 1);
58     campo_en_x = lg_mode(eje_r, 0, z, [w0, zR, p{1}, l{1}, k0]);
59     plot(eje_r, campo_en_x./max(abs(campo_en_x)), 'Color', color_asd);
60     text(-.9, .8, sprintf('LG_%i^%i}(r,0,0)', p{1}, l{1}), 'Color', color_asd, '
        FontSize', 15, 'FontWeight', 'bold');
61 end %if
62 axis([-1, 1, -1, 1]);
63 axis off;
64 colormap(my_colormap());

```

Función laguerre_asociado

```

1 function L = laguerre_asociado(x, n, k)
2     L = 0;
3     for l = 0:n
4         L += nchoosek(k+n, n-l).*(-x).^l./factorial(l);
5     end %for
6 end %function

```

Función lg_mode

```

1 function retval = lg_mode(r, phi, z, params)
2     w0 = params(1);
3     zR = params(2);
4     p = params(3);
5     l = params(4);
6     k0 = params(5);
7     w = w0.*sqrt((z.^2+zR^2)./zR^2);
8     retval = sqrt(2*factorial(p)/pi/factorial(p+abs(l)))./w.*(r.*sqrt(2)./w).^abs(l)
9     .*laguerre_asociado(2.*r.^2./w.^2, p, abs(l)).*exp(-r.^2./w.^2).*exp(i*l.*phi)
10    .*exp(i.*k0.*r.^2.*z./2./(z.^2+zR^2)).*exp(-i*(2*p+abs(l)+1).*atan(z./zR));
11 end %function

```

Función my_colormap

```

1 function retval = my_colormap()
2     COLOR_INICIAL = [0, 0, 0];
3     COLOR_FINAL = [1, 1, 1].*.9;
4     retval = [linspace(COLOR_INICIAL(1),COLOR_FINAL(1))', linspace(COLOR_INICIAL
5     (2),COLOR_FINAL(2))', linspace(COLOR_INICIAL(3),COLOR_FINAL(3))']';
6 end %function

```

B. Código utilizado para graficar los vectores de Poynting

A continuación se deja el código utilizado con el programa *Octave 4.0.0* para realizar los gráficos de la figura 4. Se utilizaron algunas funciones del apéndice A.

Script principal

```

1 clc
2 close all
3 clear all
4 more off % Esto es para que muestre los printf(), disp() y resultados a medida que
           los ejecuta y no todo junto al final
5 set(0,'defaultlinewidth',2); % Setea el 'LineWidth' predeterminado en 2.
6
7 % ----- CONFIGURACIÓN GENERAL DE GRÁFICOS -----
8 GUARDAR_GRAFICOS.SVG = 0;
9 GUARDAR_GRAFICOS.PNG = 0;
10 GUARDAR_GRAFICOS.PDF = 0;
11 % TAMAÑO DE FIGURAS -----
12 X_mm = 40; % ancho de las imágenes en milímetros
13 PROPORCION = [1 1]; x_pixels = X_mm*3.779527559*PROPORCION(1); y_pixels =
           round(PROPORCION(2)*x_pixels);
14 % -----
15 w0 = 0.3;
16 zR = 1;
17 k0 = 1;
18 z = 0;
19 l = input('Valor de l? ');
20 p = input('Valor de p? ');
21 N_PUNTOS_MALLADO_VECTOR = 1000;
22 N_PUNTOS_MALLADO_INTENSIDAD = 100e3;
23
24 TITULO_GRAFICO = sprintf('l%i p%i', l, p);
25 figure('Position',[0,0,x_pixels,y_pixels]); hold on; clear("leyenda"); clear("graf
           ");
26 set(gca, "position", [.01,.01,.98,.98])
27 x = linspace(-1,1,sqrt(N_PUNTOS_MALLADO_INTENSIDAD))';
28 y = linspace(-1,1,sqrt(N_PUNTOS_MALLADO_INTENSIDAD))';
29 [xx, yy] = meshgrid(x, y);
30 phi = atan(yy./xx);
31 phi(find(xx<0 & yy>0)) += pi;
32 phi(find(xx<0 & yy<0)) -= pi;
33 phi(find(xx<0 & phi==0)) = -pi;
34 imagesc(xx, yy, abs(lg_mode(sqrt(xx.^2+yy.^2), phi, z, [w0, zR, p, l, k0])));
35 colormap(my_colormap());
36
37 x = linspace(-1,1,sqrt(N_PUNTOS_MALLADO_VECTOR))';
38 y = linspace(-1,1,sqrt(N_PUNTOS_MALLADO_VECTOR))';
39 [xx, yy] = meshgrid(x, y);
40 phi = atan(yy./xx);
41 phi(find(xx<0 & yy>0)) += pi;
42 phi(find(xx<0 & yy<0)) -= pi;
43 phi(find(xx<0 & phi==0)) = -pi;
44 [Px, Py, Pz ] = poynting_laguerre(sqrt(xx.^2+yy.^2), phi, z, [w0, zR, p, l, k0]);
45 Pr = sqrt(Px.^2 + Py.^2);
46 Pr = Pr.^5;
47 Px_temp = Pr.*Px./sqrt(Px.^2+Py.^2);
48 Py = Pr.*Py./sqrt(Px.^2+Py.^2);
49 Px = Px_temp;
50 quiver(xx, yy, Px, Py, 1, 'Color', 'k', 'LineWidth', .5);
51

```

```

52 text(-.9, -.9, sprintf('l=%i, p=%i', l, p), 'Color', [1,1,1]);
53
54 % CONFIGURACION DEL GRAFICO -----
55 axis('square');
56 axis('off');
57 axis('tight');
58 % IMAGEN DE SALIDA -----
59 XY_RATIO = sprintf("-S%i,%i", x_pixels, y_pixels); ARCHIVO_IMAGEN = strrep(
    TITULO_GRAFICO, "□", "-");
60 if (GUARDAR_GRAFICOS.SVG)
61     print(sprintf("%s.svg", ARCHIVO_IMAGEN), '-dsvg', XY_RATIO);
62 end %if
63 if (GUARDAR_GRAFICOS.PNG)
64     print(sprintf("%s.png", ARCHIVO_IMAGEN), '-dpng', '-r200', XY_RATIO);
65 end %if
66 if (GUARDAR_GRAFICOS.PDF)
67     print(sprintf("%s.pdf", ARCHIVO_IMAGEN), '-dpdf', XY_RATIO);
68 end %if

```

Función k_laguerre

```

1 function [kx, ky, kz] = k_laguerre(r, phi, z, params)
2     w0 = params(1);
3     zR = params(2);
4     p = params(3);
5     l = params(4);
6     k0 = params(5);
7     w = w0.*sqrt((z.^2+zR^2)./zR^2);
8     kr = k0.*r.*z./(z.^2+zR.^2);
9     kphi = l./r;
10    kz = k0.*r.^2.*(zR-z).*(zR+z)./2./(z.^2+zR.^2).^2 + (2.*p+abs(l)+1)./(zR+z.^2./
    zR);
11    kx = kr.*cos(phi) - kphi.*sin(phi);
12    ky = kr.*sin(phi) + kphi.*cos(phi);
13 end %function

```

Función poynting_laguerre

```

1 function [Px, Py, Pz] = poynting_laguerre(r, phi, z, params)
2     w0 = params(1);
3     zR = params(2);
4     p = params(3);
5     l = params(4);
6     k0 = params(5);
7     w = w0.*sqrt((z.^2+zR^2)./zR^2);
8     [Px, Py, Pz] = k_laguerre(r, phi, z, params);
9     Px_temp = Px./sqrt(Px.^2 + Py.^2 + Pz.^2);
10    Py_temp = Py./sqrt(Px.^2 + Py.^2 + Pz.^2);
11    Pz_temp = Pz./sqrt(Px.^2 + Py.^2 + Pz.^2);
12    temp = abs(lg_mode(r, phi, z, params)).^2;
13    Px = Px_temp.*temp;
14    Py = Py_temp.*temp;
15    Pz = Pz_temp.*temp;
16 end %function

```

C. Código utilizado para el cálculo numérico del momento angular

A continuación se lista el código de *Octave 4.0.0* utilizado para realizar el cálculo numérico del momento angular total de una combinación arbitraria de haces de Laguerre-Gauss escalares. Con este código se realizaron, además, los gráficos de las figuras 5a, 6a, 7a, etc.

Nota Al realizar el cálculo del gradiente de la fase (función `numerical_momentum`) en forma numérica, es posible que en ciertas ocasiones el resultado no sea el esperado. En particular esto ocurre cuando se intenta calcular el gradiente justo sobre (o muy cerca de) una singularidad de fase. La solución *quick and dirty* que encontré para esto es agregar un cierto grado de aleatoriedad a los puntos x e y en los que se va a realizar el cálculo (ver líneas 55 y 56 del *script* principal) y de esta forma, con probar dos o tres veces, en general se logran evitar las singularidades de fase.

Script principal

```

1| clc
2| close all
3| clear all
4| more off % Esto es para que muestre los printf(), disp() y resultados a medida que
   | los ejecuta y no todo junto al final
5| set(0, 'defaultlinewidth', 2); % Setea el 'LineWidth' predeterminado en 2.
6|
7| % ----- CONFIGURACIÓN GENERAL DE GRÁFICOS -----
8| GUARDAR_GRAFICOS.SVG = 0;
9| GUARDAR_GRAFICOS.PNG = 0;
10| GUARDAR_GRAFICOS.PDF = 1;
11| % TAMAÑO DE FIGURAS -----
12| X_mm = 40; % ancho de las imágenes en milímetros
13| PROPORCION = [1 1]; x_pixels = X_mm*3.779527559*PROPORCION(1); y_pixels =
   | round(PROPORCION(2)*x_pixels);
14| % -----
15| N_PUNTOS_MALLADO_VECTOR = 1000;
16| N_PUNTOS_MALLADO_INTENSIDAD = 100e3;
17| w0 = 0.3;
18| zR = 1;
19| k0 = 1;
20| z = 0;
21| n_componentes = input("Numero de componentes?->");
22| for k = 1:n_componentes
23|     disp(sprintf('Componente numero%i:', k));
24|     l{k} = input('Valor de l?');
25|     p{k} = input('Valor de p?');
26|     factor{k} = input('Peso en la combinación lineal?');
27|     if k == 1
28|         str = sprintf('(.5e+.5e*i)*lg_mode(r, phi, z, [.5e, .5e, .5e, .5e, .5e,
   | e])', real(factor{k}), imag(factor{k}), w0, zR, p{k}, l{k}, k0);
29|         TITULO_GRAFICO = sprintf('scalar(.1f+.1f*i)*l%ip%i', real(factor{k}),
   | imag(factor{k}), l{k}, p{k});
30|     else
31|         str = [str, sprintf('+.5e+.5e*i)*lg_mode(r, phi, z, [.5e, .5e, .5e,
   | .5e, .5e])', real(factor{k}), imag(factor{k}), w0, zR, p{k}, l{k}, k0)];
32|         TITULO_GRAFICO = [TITULO_GRAFICO sprintf('+.5e+.5e*i)*l%ip%i', real(
   | factor{k}), imag(factor{k}), l{k}, p{k})];
33|     end%if
34| end%for
35| E = inline(str);
36|
37| figure('Position', [0,0,x_pixels,y_pixels]);
38| hold on;
39| set(gca, "position", [.01,.01,.98,.98])
40| x = linspace(-1,1,sqrt(N_PUNTOS_MALLADO_INTENSIDAD));
41| y = linspace(-1,1,sqrt(N_PUNTOS_MALLADO_INTENSIDAD));

```

```

42 [xx, yy] = meshgrid(x, y);
43 phi = atan(yy./xx);
44 phi(find(xx<0 & yy>0)) += pi;
45 phi(find(xx<0 & yy<0)) -= pi;
46 phi(find(xx<0 & phi==0)) = -pi;
47 imagesc(xx, yy, abs(E(phi,sqrt(xx.^2+yy.^2),z)).^2);
48 colormap(my_colormap());
49
50 x = linspace(-1,1,sqrt(N_PUNTOS_MALLADO_VECTOR))';
51 y = linspace(-1,1,sqrt(N_PUNTOS_MALLADO_VECTOR))';
52 x(find(x==0)) += diff(x)(1)*.1; % Esto es para no calcular los vectores justo
    sobre el quiebre de fase.
53 y(find(y==0)) += diff(y)(1)*.1; % Esto es para no calcular los vectores justo
    sobre el quiebre de fase.
54 [xx, yy] = meshgrid(x, y);
55 xx += randn(size(xx)).*(diff(xx')(1)*0.1); % Agrego ruido para que no me quede muy
    smiétrico y los puntos me agarren las singularidades de fase.
56 yy += randn(size(yy)).*(diff(yy')(1)*0.1); % Agrego ruido para que no me quede muy
    smiétrico y los puntos me agarren las singularidades de fase.
57 phi = atan(yy./xx);
58 phi(find(xx<0 & yy>0)) += pi;
59 phi(find(xx<0 & yy<0)) -= pi;
60 phi(find(xx<0 & phi==0)) = -pi;
61 [gx, gy, gz] = numerical_momentum(sqrt(xx.^2+yy.^2), phi, z, E);
62 L_total = calcular_momento_angular_total(xx,yy,gx,gy)
63 % Lo que sigue es un zoom no lineal para que se aprecie mejor el campo vectorial
    en el gráfico.
64 %- gr = sqrt(gx.^2 + gy.^2);
65 %- gr = gr.^5;
66 %- gx_temp = gr.*gx./sqrt(gx.^2+gy.^2);
67 %- gy = gr.*gy./sqrt(gx.^2+gy.^2);
68 %- gx = gx_temp;
69 quiver(xx, yy, gx, gy, 1, 'Color', [0,0,0], 'LineWidth', .5);
70
71 for k = 1:length(l)
72     text(-.97, .9-.2*(k-1), sprintf('(.1f+.1fi)l%ip%i',real(factor{k}), imag(
        factor{k}),l{k},p{k}), 'Color', [1,1,1]);
73 end %for
74 text(-.97, -.9, sprintf('L_total=.%1e', L_total), 'Color', [1,1,1]);
75
76 % CONFIGURACION DEL GRAFICO -----
77 axis('square');
78 axis('off');
79 axis('tight');
80 % IMAGEN DE SALIDA -----
81 XY_RATIO = sprintf("-S%i,%i", x_pixels, y_pixels); ARCHIVO_IMAGEN = strrep(
    TITULO_GRAFICO, "□", "-");
82 if (GUARDAR_GRAFICOS.SVG)
83     print(sprintf("%s.svg", ARCHIVO_IMAGEN),'-dsvg', XY_RATIO);
84 end %if
85 if (GUARDAR_GRAFICOS.PNG)
86     print(sprintf("%s.png", ARCHIVO_IMAGEN),'-dpng', '-r200', XY_RATIO);
87 end %if
88 if (GUARDAR_GRAFICOS.PDF)
89     print(sprintf("%s.pdf", ARCHIVO_IMAGEN),'-dpdf', XY_RATIO);
90 end %if

```

Función numerical_momentum

```

1 function [gx, gy, gz] = numerical_momentum(r, phi, z, E)
2     % Lo que sigue lo saqué de acá: https://stackoverflow.com/questions/13136987/

```

```

octave-compute-gradient-of-a-multi-dimensional-function-at-a-particular-point
3 only_x = @(f,yv,zv) @(x) f(x,yv,zv);
4 only_y = @(f,xv,zv) @(y) f(xv,y,zv);
5 only_z = @(f,xv,yv) @(z) f(xv,yv,z);
6 gradient3 =@(f,x,y,z) [gradient(only_x(f,y,z),x,1e-3),gradient(only_y(f,x,z),y
,1e-3),gradient(only_z(f,x,y),z,1e-3)];
7 % No encontré forma de hacer que esto funcione sin un doble "for" anidado :(
8 for i = 1:size(r)(1)
9     for j = 1:size(r)(2)
10        a = gradient3(inline('arg(E(phi,r,z))'), phi(i,j), r(i,j), z);
11        grad_phi(i,j) = a(1);
12        grad_r(i,j) = a(2);
13        grad_z(i,j) = a(3);
14    end%for
15 end%for
16 grad_phi = grad_phi./r; % Esto es porque estamos en coordenadas cilíndricas.
17 grad_x = grad_r.*cos(phi) - grad_phi.*sin(phi);
18 grad_y = grad_r.*sin(phi) + grad_phi.*cos(phi);
19 % Lo siguiente es para normalizar. Si no normalizo tengo problemas cuando el
    gradiente agarra una singularidad de fase.
20 %~ grad_x_temp = grad_x./sqrt(grad_x.^2 + grad_y.^2 + grad_z.^2);
21 %~ grad_y_temp = grad_y./sqrt(grad_x.^2 + grad_y.^2 + grad_z.^2);
22 %~ grad_z = grad_z./sqrt(grad_x.^2 + grad_y.^2 + grad_z.^2);
23 %~ grad_x = grad_x_temp;
24 %~ grad_y = grad_y_temp;
25
26 EE = E(phi, r, z);
27
28 gx = grad_x.*abs(EE).^2;
29 gy = grad_y.*abs(EE).^2;
30 gz = grad_z.*abs(EE).^2;
31
32 %~ gx = -(conj(EE).*grad_x + EE.*conj(grad_x));
33 %~ gy = -(conj(EE).*grad_y + EE.*conj(grad_y));
34 %~ gz = -(conj(EE).*grad_z + EE.*conj(grad_z));
35
36 % Lo que sigue es para eliminar problemas numéricos por si justo engancho el
    gradiente en una singularidad de fase... Si encuentro alguna componente que se
    disparó mucho más allá del promedio, simplemente le pongo un cero y chau.
37 %~ FACTOR_NUMERICO = 10;
38 %~ promedio = mean(mean(sqrt(abs(gx).^2 + abs(gy).^2 + abs(gz).^2)));
39 %~ gx(find(abs(gx)>promedio*FACTOR_NUMERICO)) = 0;
40 %~ gy(find(abs(gy)>promedio*FACTOR_NUMERICO)) = 0;
41 %~ gz(find(abs(gz)>promedio*FACTOR_NUMERICO)) = 0;
42 %~ gx(find(abs(gy)>promedio*FACTOR_NUMERICO)) = 0;
43 %~ gy(find(abs(gy)>promedio*FACTOR_NUMERICO)) = 0;
44 %~ gz(find(abs(gz)>promedio*FACTOR_NUMERICO)) = 0;
45 %~ gx(find(abs(gz)>promedio*FACTOR_NUMERICO)) = 0;
46 %~ gy(find(abs(gz)>promedio*FACTOR_NUMERICO)) = 0;
47 %~ gz(find(abs(gz)>promedio*FACTOR_NUMERICO)) = 0;
48 end %function

```

Función my_colormap

```

1 function retval = my_colormap()
2     COLOR_INICIAL = [0, 0, 0];
3     COLOR_FINAL = [1, 1, 1].*.9;
4     retval = [linspace(COLOR_INICIAL(1),COLOR_FINAL(1))', linspace(COLOR_INICIAL(2)
, COLOR_FINAL(2))', linspace(COLOR_INICIAL(3),COLOR_FINAL(3))']';
5 end %function

```

Función lg_mode

```

1 function retval = lg_mode(r, phi, z, params)
2     w0 = params(1);
3     zR = params(2);
4     p = params(3);
5     l = params(4);
6     k0 = params(5);
7     w = w0.*sqrt((z.^2+zR^2)./zR^2);
8     retval = sqrt(2*factorial(p)/pi/factorial(p+abs(l)))./w.*(r.*sqrt(2)./w).^abs(l)
9     .*laguerre_asociado(2.*r.^2./w.^2, p, abs(l)).*exp(-r.^2./w.^2).*exp(i*l.*phi)
10    .*exp(i.*k0.*r.^2.*z./2./(z.^2+zR^2)).*exp(-i*(2*p+abs(l)+1).*atan(z./zR));
11 end %function

```

Función laguerre_asociado

```

1 function L = laguerre_asociado(x, n, k)
2     L = 0;
3     for l = 0:n
4         L += nchoosek(k+n, n-l).*(-x).^l./factorial(l);
5     end %for
6 end %function

```

Función calcular_momento_angular_total

```

1 function L = calcular_momento_angular_total(x,y,Px,Py)
2     L = sum(sum((x(1:end-1,1:end-1).*Py(1:end-1,1:end-1) - y(1:end-1,1:end-1).*Px
3     (1:end-1,1:end-1)).*diff(x')'(1:end-1,:).*diff(y)(:,1:end-1)));
4 end %function

```

Referencias

- [1] Paraxial approximation. http://www.public.iastate.edu/~e_m.350/Paraxial%2020.pdf, 2010.
- [2] L Allen, MJ Padgett, and M Babiker. Iv the orbital angular momentum of light. In *Progress in optics*, volume 39, pages 291–372. Elsevier, 1999.
- [3] Lee W Casperson. Gaussian light beams in inhomogeneous media. *Applied optics*, 12(10):2434–2441, 1973.
- [4] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, A. Jeffrey, and D. Zwillinger. *Table of Integrals, Series and Products*. Elsevier, 7 edition, 2007.
- [5] HS Green and E Wolf. A scalar representation of electromagnetic fields. *Proceedings of the Physical Society. Section A*, 66(12):1129, 1953.
- [6] David J Griffiths. *Introduction to electrodynamics*. Prentice Hall, 1962.
- [7] John David Jackson. *Classical electrodynamics*. John Wiley & Sons, 3 edition.
- [8] Mikhail I Kolobov. *Quantum imaging*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [9] Anthony E Siegman. *Lasers* (mill valley, ca, 1986).
- [10] Anthony A Tovar. Production and propagation of cylindrically polarized laguerre–gaussian laser beams. *JOSA A*, 15(10):2705–2711, 1998.
- [11] Alison M Yao and Miles J Padgett. Orbital angular momentum: origins, behavior and applications. *Advances in Optics and Photonics*, 3(2):161–204, 2011.
- [12] Andrew Zangwill. *Modern electrodynamics*. Cambridge University Press, 2013.