# Parciales Resueltos de Matemática 3

Julio 2015

**Nota importantísima** La presente guía de parciales resueltos fue escrita por un alumno con el fin de estudiar para los respectivos parciales (es decir que en lugar de hacerlos en papel, dicho alumno los hizo en la PC, solo eso). Esto es motivo suficiente para que la probabilidad de que hayan errores en procedimientos y/o resultados sea bastante elevada. De todos modos, también hay una probabilidad de que hayan cosas que estén bien, y es por ello que este alumno decidió compartir sus parciales resueltos con la comunidad. Este material no es oficial de ninguna cátedra. Aclarado esto, el alumno les desea suerte con los parciales!

**Cómo se hacen estos apuntes** Estos apuntes están hechos usando un programa llamado Lyx[1]. Para hacer los dibujos se usó Inkscape y después se insertó las imágenes en formato `svg`[2] directamente en Lyx sin conversión alguna. En este repositorio de GitHub se encuentra la plantilla (*template*) que Alf usa actualmente, con todo lo necesario para compilarla y empezar a divertirse.

## Índice



[1]Lyx es una interfaz gráfica para Latex que hace que la escritura se vuelva extremadamente fluida y veloz (al punto de poderse tomar apuntes en vivo durante una clase).

[2]`svg` es el formato nativo de Inkscape.

# Parte I
# Primeros parciales

# 1. Parcial del 9/5/2009

## Consigna

### Ejercicio 1

Dada $\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{3}{8}xz^2, z, -y\right)$, calcular el trabajo realizado por $\vec{F}$ al mover una partícula desde el polo norte al polo sur siguiendo una curva dada en coordenadas esféricas por $\theta = \frac{\pi}{4}, r = 2$.

### Ejercicio 2

Sea $C \subset \mathbb{R}^3$ la curva determinada por la intersección de las superficies $z = x^2 + y^2$ y $z = x + y$. Evaluar

$$\int_C \frac{1}{\sqrt{2-(2x-1)(2y-1)}}\, d\ell$$

### Ejercicio 3

Dada $\vec{F}(x,y,z) = (xe^z, ye^z, z)$ y el sólido $\Omega$ encerrado por los planos $z = 1, z = 3, x + y = 1$ con $x, y, z \geq 0$, calcular el flujo de $\vec{F}$ saliente a través de $S = \partial\Omega$.

### Ejercicio 4

Si un budín circular está dado por la rotación alrededor del eje $z$ de la curva $C$

$$C:\ z = \sqrt{1-(x-2)^2} \qquad z \geq 0$$

Suponiendo que todas las unidades de medición están dadas en cm, calcule la cantidad de chocolate que se necesita para cubrir la parte superior del budín sabiendo que cada $\text{cm}^2$ necesita $2\,\text{gr}$ de chocolate.

### Ejercicio 5

Sea $C$ la curva contenida en la elipse de ecuación $4x^2 + y^2 = 16$ recorrida desde $(0,-4)$ hasta $(2,0)$ en el sentido contrario al de las agujas del reloj y $\vec{F}(x,y) = \left(2xy\sin\left(x^2y\right) - y, x^2\sin\left(x^2y\right)\right)$. Calcular

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{\ell}$$

# Resolución

## Ejercicio 1

Primero que nada conviene jugarsela por el hecho de que $\vec{F}$ sea conservativa (un campo gradiente) o al menos tenga una parte que lo sea. Para ello utilizamos el teorema (con demostración trivial) que dice que si $\vec{F} = \vec{\nabla} f$ con $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función $C^2$, es decir que $\vec{F}$ es el gradiente de $f$, entonces $\operatorname{rot}\left(\vec{\nabla} f\right) = 0$. Si hacemos la cuenta

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\left(\vec{F}\right) &= \vec{\nabla} \times \vec{F} \\
&= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{3}{8} x z^2 & z & -y \end{vmatrix} \\
&= \left(-2, \frac{6}{8} x z, 0\right)
\end{aligned}$$

Bueno, claramente no tenemos buena suerte. Creo que tampoco hay forma de escribirlo para que una parte sea gradiente. No importa, aún se puede utilizar el teorema de Stokes. Utilizo la parametrización de la superficie

$$S : T(r, \varphi) = \left(r \sin\varphi \cos\frac{\pi}{4}, r \sin\varphi \sin\frac{\pi}{4}, r\cos\varphi\right) \qquad r \in [0, 2] \qquad \varphi \in [0, \pi]$$

A su vez, la frontera de $S$ se puede descomponer como la unión de el arco (de la consigna) y el segmento que une las puntas a lo largo del eje $z$ de forma que

$$\partial S^+ = C_1^+ \cup C_2^+$$

donde

$$\begin{cases} C_1^- : & \sigma_1(\varphi) = \left(2\sin\varphi\cos\frac{\pi}{4}, 2\sin\varphi\sin\frac{\pi}{4}, 2\cos\varphi\right) \qquad \varphi \in [0, \pi] \\ C_2^- : & \sigma_2(t) = (0, 0, t) \qquad t \in [-2, 2] \end{cases}$$

Entonces, utilizando el teorema de Stokes, se puede encontrar fácilmente la respuesta como

$$\begin{aligned}
\int_{C_1^+} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} &= \iint_S \operatorname{rot}\left(\vec{F}\right) \cdot d\vec{s} - \int_{C_2^+} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \\
&= \iint_S \operatorname{rot}\left(\vec{F}\right) \cdot d\vec{s} + \int_{C_2^-} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}
\end{aligned}$$

Las cuentas son

$$\begin{aligned}
\iint_S \operatorname{rot}\left(\vec{F}\right) \cdot d\vec{s} &= \int_0^2 \int_0^\pi \left(-2, \frac{6}{8} x z, 0\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (1, -1, 0)\, r\, d\varphi\, dr \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^2 \int_0^\pi \left[-2 - \frac{6}{8}\left(r \sin\varphi \cos\frac{\pi}{4}\right)(r\cos\varphi)\right] r\, d\varphi\, dr \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^2 \int_0^\pi \left[-2r - \frac{3}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) r^3 \sin\varphi\cos\varphi\right] d\varphi\, dr \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[-2 \int_0^2 \int_0^\pi r\, d\varphi\, dr - \frac{3}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \int_0^2 \int_0^\pi r^3 \sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi\, dr\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[-2 \int_0^2 r\, dr \int_0^\pi d\varphi - \frac{3}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \int_0^2 r^3\, dr \cancelto{0}{\int_0^\pi \sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi}\right] \\
&= -\frac{2}{\sqrt{2}} 2\pi \\
&= -2\pi\sqrt{2}
\end{aligned}$$

La integral que se cancela y da 0 es evidente al graficar la función y observar la simetría que tiene en el intervalo $(0,\pi)$.

La otra integral es

$$\begin{aligned}
\int_{C_2^-} \vec{F}\cdot\vec{d\ell} &= -\int_{C_2^+} \vec{F}\cdot\vec{d\ell} \\
&= -\int_{-2}^{2} \left(\frac{3}{8}xz^2, z, -y\right)\Big]_{(0,0,t)} \cdot (0,0,-1)\ dt \\
&= -\int_{-2}^{2} (0,t,0)\cdot(0,0,-1)\,dt \\
&= 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\boxed{\int_{C_1^+} \vec{F}\cdot\vec{d\ell} = -2\pi\sqrt{2}}$$

Otra opción para resolverlo sería calcular la integral por definición, es decir, utilizando

$$\int_{C_1^+} \vec{F}\cdot\vec{d\ell} \overset{\text{def}}{=} -\int \left\langle \vec{F}(\sigma_1(t)), \frac{\sigma_1'(t)}{||\sigma_1'(t)||} \right\rangle dt$$

con

$$\begin{cases} C_1^- : & \sigma_1(t) = \left(2\sin t\cos\frac{\pi}{4}, 2\sin t\sin\frac{\pi}{4}, 2\cos t\right) \qquad \varphi\in[0,\pi] \\ & \sigma_1'(t) = \left(2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos t, 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos t, -2\sin t\right) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
||\sigma_1'(t)|| &= \sqrt{4\cos^2 \pi/4\cos^2 t + 4\sin^2\pi/4\cos^2 t + 4\sin^2 t} \\
&= 2\cos\frac{\pi}{4}\sqrt{\cos^2 t + \cos^2 t + \sin^2 t} \\
&= 2\cos\frac{\pi}{4}\sqrt{\cos^2 t + 1}
\end{aligned}$$

Claramente por acá no se puede seguir, es imposible esta integral.

## Ejercicio 2

Para evaluar la integral que nos piden procedemos según

$$\int_C f\,d\ell = \int_a^b f(\sigma(t))\,||\sigma'(t)||\ dt$$

donde $\sigma:[a,b]\to C$ es una parametrización regular de $C$.

La curva $C$ está dada por las ecuaciones

$$C:\begin{cases} z = x^2+y^2 \\ z = x+y \end{cases}$$

Dado que es la intersección entre un paraboloide y un plano, el resultado es una elipse (creo).

$$\begin{aligned}
0 &= x^2 - x + y^2 - y \\
&= \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{1}{2} &= \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 \\
1 &= \frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}} + \frac{\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Se puede parametrizar como

$$\sigma(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos t, \sin t, \cos t + \sin t\right) + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right) \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Notar que quizás se puede simplificar toda la cuenta planteando un cambio de coordenadas, inspirado en el campo a integrar y en la parametrización que se obtuvo

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \frac{1}{\sqrt{2-(2x-1)(2y-1)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-(x-\frac{1}{2})(y-\frac{1}{2})}} \end{aligned}$$

Si hacemos el desplazamiento inducido por el cambio de variables

$$\text{Cambio de variables } \rightarrow \begin{cases} x = u + \frac{1}{2} \\ y = v + \frac{1}{2} \\ z = w + 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} dx = du \\ dy = dv \\ dz = dw \end{cases}$$

la cuenta debería dar lo mismo. Entonces el campo queda

$$f(u,v,w) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-uv}}$$

y la elipse parametrizada en estas nuevas variables es

$$\Sigma(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos t, \sin t, \cos t + \sin t\right) \qquad t \in [0, 2\pi]$$

$$\Sigma'(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\sin t, \cos t, \cos t - \sin t\right)$$

De esta forma

$$\begin{aligned} ||\Sigma'(t)|| &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + \cos^2 t + \sin^2 t - 2\cos t \sin t} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2 - 2\cos t \sin t} \\ &= \sqrt{1-\cos t \sin t} \end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned} \int_C f \, d\ell &= \int_0^{2\pi} f\left(\Sigma(t)\right) ||\Sigma'(t)|| \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{1-\cos t \sin t}}{\sqrt{2}\sqrt{1-\frac{1}{2}\cos t \sin t}} \, dt \end{aligned}$$

NO SE CANCELO!!!!! Preguntar

## Ejercicio 3

Por el teorema de la divergencia sabemos que

$$\begin{aligned}
\iint_{\partial\Omega} \vec{F}\cdot\vec{ds} &= \iiint_{\Omega} \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\,dv \\
&= \iiint_{\Omega} \left(2e^z+1\right)\,dv \\
&= \int_1^3\int_0^1\int_0^x \left(2e^z+1\right)\,dy\,dx\,dz \\
&= \int_1^3 \left(2e^z+1\right)\int_0^1 x\,dx\,dz \\
&= \int_1^3 \left(2e^z+1\right)\,dz\int_0^1 x\,dx \\
&= \left(2e^z+z\right)\rfloor_{z=1}^{z=3}\,\frac{x^2}{2}\bigg\rfloor_{x=0}^{x=1} \\
&= \left(2e^3+3-2e-1\right)\frac{1}{2} \\
&= e^3-e+1
\end{aligned}$$

## Ejercicio 4

La curva $C$ se puede parametrizar como

$$\sigma(t) = (\cos t, 0, \sin t) + (2,0,0) \qquad t\in[0,\pi]$$

Para realizar la revolución alrededor del eje $z$, supongamos un punto genérico $p_0 = (x_0, 0, z_0)$ el cual queremos revolucionar alrededor de $z$. Entonces el círculo que se obtiene al revolucionarlo es

$$p = (x_0\cos\theta, x_0\sin\theta, z_0) \qquad \theta\in[0,2\pi)$$

Con esta misma idea revolucionamos los puntos de $\sigma(t)$ para obtener la superficie del budín. Un parametrización posible es

$$T(\theta,t) = ((\cos t+2)\cos\theta, (\cos t+2)\sin\theta, \sin t) \qquad \begin{cases}\theta\in[0,2\pi]\\ t\in[0,\pi]\end{cases}$$

$$\begin{cases} T_\theta(\theta,t) = (-(\cos t+2)\sin\theta, (\cos t+2)\cos\theta, 0) \\ T_t(\theta,t) = (-\sin t\cos\theta, -\sin t\sin\theta, \cos t)\end{cases}$$

$$\begin{aligned}
T_\theta\times T_t &= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ -(\cos t+2)\sin\theta & (\cos t+2)\cos\theta & 0 \\ -\sin t\cos\theta & -\sin t\sin\theta & \cos t\end{vmatrix} \\
&= \begin{cases} \hat{x}) & \cos t\,(\cos t+2)\cos\theta \\ \hat{y}) & \cos t\,(\cos t+2)\sin\theta \\ \hat{z}) & \sin t\,(\cos t+2)\sin^2\theta + \sin t\,(\cos t+2)\sin^2\theta \end{cases} \\
&= \begin{cases} \hat{x}) & \cos t\,(\cos t+2)\cos\theta \\ \hat{y}) & \cos t\,(\cos t+2)\sin\theta \\ \hat{z}) & \sin t\,(\cos t+2) \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
||T_\theta\times T_t|| &= \sqrt{\cos^2 t\,(\cos t+2)^2\,\cancel{\left[\sin^2\theta+\cos^2\theta\right]} + \sin^2 t\,(\cos t+2)^2} \\
&= \sqrt{(\cos t+2)^2} \\
&= \cos t+2
\end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}(S) &= \iint\limits_S ds \\
&= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} ||T_\theta \times T_t||\ dt\, d\theta \\
&= \int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^{\pi} (\cos t + 2)\ dt \\
&= 2\pi\ (\sin t + 2t)\rfloor_0^{\pi}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A}(S) = 4\pi}$$

## Ejercicio 5

En el caso de que $\vec{F}$ sea un campo gradiente el ejercicio se vuelve muy fácil, así que vamos a probar de encontrar $f$ tal que $\vec{F} = \vec{\nabla} f$. Si este fuera el caso, entonces

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy\sin\left(x^2y\right) - y \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2\sin\left(x^2y\right) \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\int \frac{\partial f}{\partial x}\, dx &= h(x,y) + g(y) \\
&= \int \left(2xy\sin\left(x^2y\right) - y\right)\ dx \\
&= -\cos\left(x^2y\right) - yx + g(y)
\end{aligned}$$

de forma tal que $f(x,y) = h(x,y) + g(y)$. Por otra parte

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{dg}{dy} \\
&= x^2\sin\left(x^2y\right) - x + \frac{dg}{dy}
\end{aligned}$$

Para que $\vec{F} = \vec{\nabla} f$ esto último debe ser igual a la segunda componente de $\vec{F}$, por lo tanto

$$x^2\sin\left(x^2y\right) = x^2\sin\left(x^2y\right) - x + \frac{dg}{dy} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{dg}{dy} = x \qquad \Longleftrightarrow \qquad g(y) = yx + c$$

Lamentablemente esto nos indica que $\vec{F} \neq \vec{\nabla} f$ ya que $g(y)$ no puede depender de $x$.

Sin embargo aún podemos pedir que $\vec{F} = \vec{\nabla} f + \vec{G}$, es decir que alguna parte de $\vec{F}$ sí sea un campo gradiente. Si escribimos al campo como

$$\vec{F} = \left(2xy\sin\left(x^2y\right), x^2\sin\left(x^2y\right)\right) + (y,0)$$

entonces es claro que si $f(x,y) = -\cos\left(x^2y\right)$ y $\vec{G} = (y,0)$ se cumple lo que pedimos ✓. En este caso la integral se puede resolver de forma mucho más sencilla utilizando el teorema de campos gradientes como

$$\begin{aligned}
\int_C \vec{F}\cdot d\vec{\ell} &= \int_C \left(\vec{\nabla} f + \vec{G}\right)\cdot d\vec{\ell} \\
&= \int_C \vec{\nabla} f\cdot d\vec{\ell} + \int_C \vec{G}\cdot d\vec{\ell} \\
&= f\left(\sigma(t_2)\right) - f\left(\sigma(t_1)\right) + \int_{t_1}^{t_2} \vec{G}\left(\sigma(t)\right)\cdot \sigma'(t)\, dt
\end{aligned}$$

 

Sabiendo esto nos concentramos en hallar una parametrización de la curva. La más fácil y directa es

$$\sigma(t) = (2\cos t, 4\sin t) \qquad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$$

$$\sigma'(t) = (-2\sin t, 4\cos t)$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F}\cdot d\vec{\ell} &= f(0,-4) - f(2,0) + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} (4\sin t, 0)\cdot(-2\sin t, 4\cos t)\; dt \\ &= -2 + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} -8\sin^2 t\, dt \\ &= -2 - \frac{8}{4}\pi \end{aligned}$$

$$\boxed{\int_C \vec{F}\cdot d\vec{\ell} = -2 - 2\pi}$$

# 2. Parcial del 24/10/2009

## Consigna

### Ejercicio 1

Dar una parametrización de la curva dada en coordenadas polares como $r = \cos\theta, \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
Mostrar que la curva es suave y hallar su longitud.

### Ejercicio 2

Hallar el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F} = \left(x, y, e^{x^2+y^2}\right)$ sobre una partícula que se mueve por la curva intersección del paraboloide $z = x^2 + y^2$ y la superficie dada por

$$S = \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = \theta \end{cases} \qquad r \geq 0 \quad \theta \geq 0$$

desde el punto $\left(\sqrt{2\pi}, 0, 2\pi\right)$ al punto $(0, 0, 0)$.

### Ejercicio 3

Hallar el área de la porción de la superficie $4x^2 + y^2 + 9z^2 = 1$ contenida en el sector $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

### Ejercicio 4

Hallar la integral curvilínea del campo $\vec{F} = \left(4xe^{2x^2+y^2} + 3x^2y + x + y, 2ye^{2x^2+y^2} + x^3 + 1\right)$ a lo largo de la circunferencia de radio 2 centrada en el origen, recorrida en el sentido antihorario.

 

# Resolución

## Ejercicio 1

Una parametrización directa de la curva es

$$\begin{aligned}\sigma(\theta) &= (x(r,\theta), y(r,\theta)) \\ &= (r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin(\theta)) \\ &= \left(\cos^2\theta, \cos\theta\sin\theta\right)\end{aligned}$$

Para verificar que sea suave nos basamos en la definición vista en clase que dice que una curva $C$ es suave en el punto $p_0$ si en un entorno de dicho punto la curva $C$ se puede parametrizar mediante una parametrización regular. Esto implica que si probamos que $\sigma(\theta)$ es regular para $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ entonces habremos probado que la curva es suave en todos sus puntos.

Para que $\sigma(\theta)$ sea regular se deben cumplir las siguientes condiciones (para $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$)

1. $\sigma(\theta)$ debe ser inyectiva.
   Preguntar No se cómo probarlo, pero se que es inyectiva.

2. $\sigma(\theta) \in C^1$.
   Es claro que esta condición se cumple ya que $\sigma(\theta)$ es producto de funciones $C^\infty$.

3. $\frac{d\sigma}{d\theta} \neq \vec{0}$.
   La velocidad de $\sigma$ es
   $$\sigma'(\theta) = \left(-2\cos\theta\sin\theta, -\sin^2\theta + \cos^2\theta\right)$$

   $$\begin{aligned}||\sigma'(\theta)|| &= \sqrt{4\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta + \cos^4\theta - 2\cos^2\theta\sin^2\theta} \\ &= \sqrt{2\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta + \cos^4\theta} \\ &= \sqrt{\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right)^2} \\ &= 1\end{aligned}$$

   Queda claro que $||\sigma'(\theta)|| \neq 0$ lo cual implica que $\sigma'(\theta) \neq \vec{0}$.

Para hallar su longitud utilizamos la definición vista en clase

$$\mathscr{L}(C) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{[a,b]} ||\sigma'(t)||\, dt \qquad \sigma(t) : [a,b] \to C$$

donde $||\sigma'(t)|| = 1$ como se mostró más arriba. Entonces

$$\boxed{\mathscr{L}(C) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt = \pi}$$

## Ejercicio 2

Veamos si podemos simplificar un poco la cosa

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \left(x, y, e^{x^2+y^2}\right) \\ &= (x,y,0) + \left(0,0,\exp\left(x^2+y^2\right)\right) \\ &= \vec{\nabla}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}\right) + \left(0,0,\exp\left(x^2+y^2\right)\right)\end{aligned}$$

Esto implica que

$$\int\limits_C \vec{F}\cdot\vec{d\ell} = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}\right)\Bigg]_{\left(\sqrt{2\pi},0,2\pi\right)}^{(0,0,0)} + \int\limits_C \left(0,0,\exp\left(x^2+y^2\right)\right)\cdot\vec{d\ell}$$

 

El problema ahora es evaluar la integral, pero como la tercera coordenada no depende de $z$ quizás se pueda hacer algo, o quizás esta preparado para que mágicamente se cancele todo y sale. El paraboloide se puede parametrizar como

$$T_P(r,\theta) = \begin{cases} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ r^2 \end{cases}$$

por lo tanto la intersección de las superficies implica que

$$\begin{cases} \hat{x}) & r\cos\theta = r\cos\theta \\ \hat{y}) & r\sin\theta = r\sin\theta \\ \hat{z}) & r^2 = \theta \end{cases}$$

lo cual conduce a la parametrización de la curva

$$\sigma(\theta) = \left(\sqrt{\theta}\cos\theta, \sqrt{\theta}\sin\theta, \theta\right) \qquad \theta : 2\pi \to 0$$

donde $\theta : 2\pi \to 0$ significa que $\theta \in [0, 2\pi]$ pero se mueve "para atrás". La velocidad de la parametrización es

$$\sigma'(\theta) = \left(\frac{\cos\theta}{2\sqrt{\theta}} - \sqrt{\theta}\sin\theta, \frac{\sin\theta}{2\sqrt{\theta}} + \sqrt{\theta}\cos\theta, 1\right)$$

La integral resulta ser entonces

$$\begin{aligned} \int_C \left(0,0,\exp\left(x^2+y^2\right)\right)\cdot\vec{d\ell} &= \int_{2\pi}^{0} \left(0,0,e^\theta\right)\cdot\left(\frac{\cos\theta}{2\sqrt{\theta}} - \sqrt{\theta}\sin\theta, \frac{\sin\theta}{2\sqrt{\theta}} + \sqrt{\theta}\cos\theta, 1\right) d\theta \\ &= \int_{2\pi}^{0} e^\theta \, d\theta \\ &= 1 - e^{2\pi} \end{aligned}$$

Finalmente

$$\boxed{\int_C \vec{F}\cdot\vec{d\ell} = -\pi - 2\pi^2 + 1 - e^{2\pi}}$$

## Ejercicio 3

La ecuación de la superficie se puede escribir como

$$\frac{x^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + y^2 + \frac{z^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = 1$$

donde es evidente que se trata de un elipsoide elíptico (o como se llame) centrado en el origen cuyos semiejes en cada dirección son $\frac{1}{2}\hat{x}, 1\hat{y}, \frac{1}{3}\hat{z}$. Se puede parametrizar en forma sencilla (coordenadas esféricas) como

$$T(\theta,\varphi) = \left(\frac{1}{2}\sin\varphi\cos\theta, \sin\varphi\sin\theta, \frac{1}{3}\cos\varphi\right) \qquad \begin{cases} \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_\theta = \left(-\frac{1}{2}\sin\varphi\sin\theta, \sin\varphi\cos\theta, 0\right) \\ T_\varphi = \left(\frac{1}{2}\cos\varphi\cos\theta, \cos\varphi\sin\theta, -\frac{1}{3}\sin\varphi\right) \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
T_\theta \times T_\varphi &= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ -\frac{1}{2}\sin\varphi\sin\theta & \sin\varphi\cos\theta & 0 \\ \frac{1}{2}\cos\varphi\cos\theta & \cos\varphi\sin\theta & -\frac{1}{3}\sin\varphi \end{vmatrix} \\
&= \begin{cases} \hat{x}) & -\frac{1}{3}\sin^2\varphi\cos\theta \\ \hat{y}) & -\frac{1}{6}\sin^2\varphi\sin\theta \\ \hat{z}) & -\frac{1}{2}\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi - \frac{1}{2}\cos^2\theta\sin\varphi\cos\varphi \end{cases} \\
&= \begin{cases} \hat{x}) & -\frac{1}{3}\sin^2\varphi\cos\theta \\ \hat{y}) & -\frac{1}{6}\sin^2\varphi\sin\theta \\ \hat{z}) & -\frac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
||T_\theta \times T_\varphi|| &= \sqrt{\frac{1}{9}\sin^4\varphi\cos^2\theta + \frac{1}{36}\sin^4\varphi\sin^2\theta + \frac{1}{4}\sin^2\varphi\cos^2\varphi} \\
&= \frac{1}{3}\sqrt{\sin^4\varphi\cos^2\theta + \frac{1}{4}\sin^4\varphi\sin^2\theta + \frac{1}{4}}
\end{aligned}
$$

O me equivoqué en algo o se resuelve de otra manera, porque integrar eso es imposible me parece.

Una alternativa es probar con otra parametrización como $T(x,y) = \left(x, y, 3\sqrt{1-4x^2-y^2}\right)$, pero viendo cómo quedarían $T_x$ y $T_y$ me parece que es peor. Preguntar Cómo se hace?

## Ejercicio 4

Este es el típico ejercicio en que gran parte de $\vec{F}$ es un campo conservativo entonces se anula todo y queda muy fácil. Podemos escribir

$$
\begin{aligned}
\vec{F} &= \left(4xe^{2x^2+y^2} + 3x^2y + x + y, 2ye^{2x^2+y^2} + x^3 + 1\right) \\
&= \vec{\nabla}\left(e^{2x^2+y^2} + x^3y\right) + (x+y, 1) \\
&= \vec{\nabla}f + \vec{G}
\end{aligned}
$$

Entonces

$$
\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{\ell} = \cancelto{0}{\oint_C \vec{\nabla}f\cdot d\vec{\ell}} + \oint_C \vec{G}\cdot d\vec{\ell}
$$

donde $C$ podría ser cualquier curva simple cerrada, en particular la circunferencia de radio 2 centrada en el origen y recorrida en sentido antihorario. Para simplificar aún más el problema, se puede aplicar el teorema de Green y entonces

$$
\oint_C \vec{G}\cdot d\vec{\ell} = \iint_D (Q_x - P_y)\, dx\, dy
$$

donde $D$ es la región comprendida en el interior de $C$ y $Q$ y $P$ son las componentes $y$ y $x$ del campo $\vec{G}$. Entonces

$$
\begin{aligned}
\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{\ell} &= \iint_D (0-1)\, dx\, dy \\
&= -\mathscr{A}(D)
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\int_C \vec{F}\cdot d\vec{\ell} = -4\pi}
$$

# 3. Parcial del 09/10/2010

## Consigna

### Ejercicio 1

Considerar la curva $C = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } y = 1 - x^2, x + y + z = 1, x, y \geq 0\right\}$.

1. Obtener una parametrización regular de $C$ que comience en $(0, 1, 0)$ y termine en $(1, 0, 0)$.
2. Calcular la integral $\int_C \vec{F} \cdot \vec{d\ell}$ con $C$ orientada como en el punto anterior, donde $\vec{F} = (2x, y, -z)$.

### Ejercicio 2

Sea $S$ la superficie dada por $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } z = x^2 - y^2, x^2 + y^2 \leq 1\right\}$ y sea $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida como $\phi(x, y, z) = \left(4z + 8y^2 + 1\right)^{\frac{3}{2}}$. Calcular

$$\iint_S \phi \, ds$$

### Ejercicio 3

Consideremos $S$ como el sector del paraboloide definido como $S = \left\{(x, y, z) \text{ tq } x^2 + z^2 = y, y \leq 9\right\}$.

1. Obtener el campo $\hat{\eta}(x, y, z)$ normal unitario a $S$ tal que en cada punto apunta hacia adentro del paraboloide.
2. Encontrar una ecuación del plano tangente a $S$ en el punto $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$.
3. Calcular

   $$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{ds} \qquad \vec{F} = (x - z, y, x + z)$$

   donde en $S$ tomamos la normal que apunta en dirección de $y$ positivo.

### Ejercicio 4

Calcular la integral $\int_C \vec{F} \cdot \vec{d\ell}$ donde $C = \left\{(x, y) \text{ tq } 4x^2 + y^2 = 1\right\}$ está recorrida en sentido antihorario y

$$\vec{F}(x, y) = \left(e^{x^2} \left(2x \sin(x + y) + \cos(x + y)\right) + xy, e^{x^2} \cos(x + y) - x\right)$$

# Resolución

## Ejercicio 1

La curva está dada por las ecuaciones

$$C \to \begin{cases} y = 1 - x^2 \\ x + y + z = 1 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Despejando de la segunda ecuación se obtiene $z = 1 - x - y$ y reemplazando $y$ por la primera ecuación $z = 1 - x - 1 + x^2 = x^2 - x$. Una parametrización posible es entonces

$$\sigma(x) = \left(x, 1 - x^2, x^2 - x\right) \qquad x \in [0, 1]$$

Observar que esta parametrización comienza en $(0, 1, 0)$ y termina en $(1, 0, 0)$ tal como se pide. Para que sea regular es necesario que

1. $\sigma(x)$ sea inyectiva para $x \in [0, 1]$.
   Como todas las coordenadas en forma individual son inyectivas para $x \in [0, 1]$ entonces $\sigma(x)$ es inyectiva ✓
2. $\sigma(x)$ debe ser al menos $C^1$ para $x \in [0, 1]$.
   $\sigma(x)$ es $C^\infty$ ✓
3. $\left|\left|\frac{d\sigma}{dx}\right|\right| \neq 0 \, \forall x \in [0, 1]$.

$$\frac{d\sigma}{dx}(x) = (1, -2x, 2x) \Rightarrow \left|\left|\frac{d\sigma}{dx}\right|\right| \neq 0 \, \forall x \in \mathbb{R} ✓$$

La parametrización dada es regular ✓.

La integral se calcula como

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell} &= \int_0^1 \vec{F}(\sigma(x)) \cdot \sigma'(x) \, dx \\ &= \int_0^1 \left(2x, -x^2, -x^2 + x\right) \cdot (1, -2x, 2x) \, dx \\ &= \int_0^1 \left(2x + \cancel{2x^3} - \cancel{2x^3} + 2x^2\right) \, dx \\ &= 2 \int_0^1 \left(x^2 + x\right) \, dx \end{aligned}$$

$$\boxed{\int_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \frac{5}{3}}$$

## Ejercicio 3

Las ecuaciones del paraboloide son

$$S \to \begin{cases} y = x^2 + z^2 \\ y \leq 9 \end{cases}$$

por lo tanto, una parametrización en coordenadas cilíndricas es

$$T(t, \theta) = \left(t \cos\theta, t^2, t \sin\theta\right) \qquad \begin{cases} t \in [0, 3] \\ \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

Teniendo esta parametrización, el campo de versores normales a $S$ se obtiene como

$$\hat{\eta} = \frac{T_t \times T_\theta}{||T_t \times T_\theta||}$$

Entonces

$$\begin{cases} T_t = (\cos\theta, 2t, \sin\theta) \\ T_\theta = (-t\sin\theta, 0, t\cos\theta) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} T_t \times T_\theta &= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \cos\theta & 2t & \sin\theta \\ -t\sin\theta & 0 & t\cos\theta \end{vmatrix} \\ &= \begin{cases} \hat{x}) & 2t^2\cos\theta \\ \hat{y}) & -t\sin^2\theta - t\cos^2\theta \\ \hat{z}) & -2t^2\sin\theta \end{cases} \\ &= \begin{cases} \hat{x}) & 2t^2\cos\theta \\ \hat{y}) & -t \\ \hat{z}) & -2t^2\sin\theta \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ||T_t \times T_\theta|| &= \sqrt{4t^4\cos^2\theta + t^2 + 4t^4\sin^2\theta} \\ &= \sqrt{4t^4 + t^2} \\ &= t\sqrt{4t^2+1} \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \hat{\eta} &= \frac{\left(2t^2\cos\theta, -t, -2t^2\sin\theta\right)}{t\sqrt{4t^2+1}} \\ &= \frac{(2t\cos\theta, -1, -2t\sin\theta)}{\sqrt{4t^2+1}} \end{aligned}$$

Observar que la coordenada $y$ de $\hat{\eta}$ es negativa, lo cual indica que apunta “hacia afuera” del paraboloide (porque “hacia adentro” está en la dirección positiva de $y$). Para resolver este problema se invierte el orden del producto vectorial $T_\theta \times T_t$ o bien se multiplica a $\hat{\eta}$ por $-1$ y listo. Entonces

$$\boxed{\hat{\eta}\left(\sigma(t)\right) = \frac{(-2t\cos\theta, 1, 2t\sin\theta)}{\sqrt{4t^2+1}}}$$

El plano tangente en un punto $p_0$ de $S$ es el conjunto de todos los puntos $p_\perp$ tales que $(p_\perp - p_0)\cdot\hat{\eta}(p_0) = 0$ donde $p_0 = \sigma(t_0)$. En este caso $p_0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ por lo tanto

$$\begin{cases} \frac{1}{2} = t_0\cos\theta_0 \\ \frac{1}{2} = t_0^2 \\ \frac{1}{2} = t_0\sin\theta_0 \end{cases} \Rightarrow t = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_0 = \frac{\pi}{4}$$

Entonces

$$\hat{\eta}(p_0) = \frac{(-1,1,1)}{\sqrt{3}}$$

entonces la ecuación del plano tangente es

$$\boxed{\Pi : \left((x,y,z) - \frac{1}{2}(1,1,1)\right) \cdot \frac{(-1,1,1)}{\sqrt{3}} = 0}$$

 

Para esta integral me parece que hay que plantear la definición y listo, sin mucho truco...

$$\begin{aligned}
\iint\limits_S \vec{F}\cdot\vec{ds} &= \int_0^{2\pi}\int_0^3 \vec{F}\left(T(t,\theta)\right)\cdot\hat{\eta}(t,\theta)\,dt\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^3 t\left(\cos\theta-\sin\theta, t, \cos\theta+\sin\theta\right)\cdot\frac{(-2t\cos\theta, 1, 2t\sin\theta)}{\sqrt{4t^2+1}}\,dt\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^3 \frac{t}{\sqrt{4t^2+1}}\left[-2t\cos^2\theta+2t\sin\theta\cos\theta+t+2t\sin\theta\cos\theta+2t\sin^2\theta\right]\,dt\,d\theta
\end{aligned}$$

O me confundí en algo o mágicamente se cancela todo... Preguntar

## Ejercicio 4

Este es otro típico ejercicio en el que una parte de $\vec{F}$ es un campo gradiente y se cancela todo. Obsérvese que si

$$f = e^{x^2}\sin(x+y) \qquad \vec{G} = (xy, -x)$$

entonces

$$\vec{F} = \vec{\nabla}f + \vec{G}$$

y como $C$ es una curva cerrada entonces

$$\int\limits_C \vec{F}\cdot d\vec{\ell} = \cancelto{0}{\int\limits_C \vec{\nabla}f\cdot d\vec{\ell}} + \int\limits_C \vec{G}\cdot d\vec{\ell}$$

Como $\vec{G}\in C^\infty$ en el interior de la elipse y toda su frontera, entonces se puede utilizar el teorema de Green y si $\vec{G}=(P,Q)$ se obtiene

$$\begin{aligned}
\int\limits_{C^+} \vec{G}\cdot d\vec{\ell} &= \iint\limits_D \left(Q_x - P_y\right)\,dx\,dy \\
&= \int_0^1 \int_{-\frac{1}{2}\sqrt{1-y^2}}^{\frac{1}{2}\sqrt{1-y^2}} (-1-x)\,dx\,xy \\
&= -\int_0^1 \left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg]_{-\frac{1}{2}\sqrt{1-y^2}}^{\frac{1}{2}\sqrt{1-y^2}} dy \\
&= -\int_0^1 \left(\frac{1-y^2}{4}+\sqrt{1-y^2}\right)dy \\
&\;\;\vdots
\end{aligned}$$

Listo, lo que queda es hacer cuentas.

# 4. Parcial del 14/05/2011

## Consigna

### Ejercicio 1

Sea $C$ la curva dada como intersección de superficies del siguiente modo

$$C = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } z = xy\right\} \cap \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } x^2 + y^2 = 1\right\}$$

orientada positivamente. Sea el campo $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $\vec{F} = (x,y,z)$. Calcular $\int_C \vec{F} \cdot \vec{d\ell}$.

### Ejercicio 2

Sea $S$ la superficie imagen de la parametrización

$$T : [0,1] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3 \text{ tq } T(r,\theta) = \left(r\cos\theta, r\sin\theta, r^2\right)$$

1. Probar que $S$ es una superficie suave.
2. Calcular $\iint_S \sqrt{4z+1}\, ds$.

### Ejercicio 3

Sea el campo vectorial $\vec{F} = (x,y,0)$ y sea $S$ una porción del cilindro $x^2 + y^2 = 25$ tal que el área de $S$ es igual a 2. Calcular el flujo de $\vec{F}$ a través de $S$ considerando la normal saliente a la superficie.

### Ejercicio 4

Calcular el área de la región encerrada por la curva dada en coordenadas polares

$$r = \sin(2t) \qquad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

# Resolución

## Ejercicio 1

Una parametrización regular de $C$ es

$$\sigma(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, \cos\theta\sin\theta) \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

$\sigma(\theta) \in C^\infty\checkmark$, $\sigma(\theta)$ es inyectiva en $\theta \in [0, 2\pi]$ (las dos primeras coordenadas son una circunferencia) y además

$$\begin{aligned} ||\sigma'(\theta)|| &= \sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta + \left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)^2} \\ &= \sqrt{1 + \left(\cos^2\theta - (1 - \cos^2\theta)\right)^2} \\ &= \sqrt{2} \neq 0 \,\forall\theta \in \mathbb{R}\checkmark \end{aligned}$$

La parametrización es regular por lo tanto $C$ es suave, como $\sigma(0) = \sigma(2\pi)$ entonces $C$ es una curva cerrada.

Como $C$ es una curva suave y cerrada y $\vec{F} = \vec{\nabla} f$ con $f = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2}$ entonces

$$\boxed{\int_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = 0}$$

## Ejercicio 2

Para probar que $S$ es suave alcanza con probar que $T$ sea una parametrización regular, lo cual implica que

1. $T(r, \theta)$ es inyectiva.
   Para probar la inyectividad podemos ver si la norma de $T$ es inyectiva lo cual haría que $T$ sea inyectiva. Entonces

$$\begin{aligned} ||T(r,\theta)|| &= \sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta + r^4} \\ &= \sqrt{r^4 + r^2} \end{aligned}$$

   Como $r \in [0, 1]$ entonces $||T(r, \theta)||$ es inyectiva por lo tanto $T(r, \theta)$ es inyectiva $\checkmark$.

2. $T \in C^1$.
   $T \in C^\infty$ por ser sus componentes producto de funciones $C^\infty$.

3. $||T_u \times T_v|| \neq 0$.

$$\begin{cases} T_r = (\cos\theta, \sin\theta, 2r) \\ T_\theta = (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} T_r \times T_\theta &= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \cos\theta & \sin\theta & 2r \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{cases} \hat{x}) & -2r^2\cos\theta \\ \hat{y}) & -2r^2\sin\theta \\ \hat{z}) & r \end{cases} \end{aligned}$$

$$||T_r \times T_\theta|| = \sqrt{4r^4 + r^2} \neq 0 \,\forall r \in (0, 1]$$

   Esta parametrización no es regular en el origen!!

No hay problema Willy, sabemos que $S$ es un paraboloide que se puede parametrizar mediante

$$T_2(x, y) = \left(x, y, x^2 + y^2\right) \qquad (x, y) \in \text{circunferencia radio 1}$$

Con esta parametrización funciona todo y se prueba fácilmente que $S$ es suave en todos los puntos.

 

La integral es

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_S \overbrace{\sqrt{4z+1}}^{f(x,y,z)}\, ds &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 f\left(T(r,\theta)\right) ||T_r \times T_\theta||\; dr\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{4r^2+1}\sqrt{4r^4+r^2}\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 r\sqrt{4r^2+1}\sqrt{4r^2+1}\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(4r^3+r\right)\; dr\, d\theta \\
&= 2\pi\left(r^4+\frac{r^2}{2}\right)\Big]_0^1
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\iint\limits_S \sqrt{4z+1}\, ds = 2\pi + \frac{1}{2}}
$$

## Ejercicio 3

Este ejercicio en coordenadas polares debería ser extremadamente fácil dada la simetría de la región de integración y del campo. Una parametrización de $S$ es

$$
T(z,\theta) = (5\cos\theta, 5\sin\theta, z) \qquad \begin{cases} z \in [z_0, z_0+2] \\ \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}
$$

$$
\begin{cases} T_z = (0,0,1) \\ T_\theta = (-5\sin\theta, 5\cos\theta, 0) \end{cases}
$$

$$
T_z \times T_\theta = (-5\cos\theta, -5\sin\theta, 0)
$$

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_S \vec{F}\cdot\vec{ds} &= \iint\limits_S \vec{F}\cdot\hat{\eta}\, ds \\
&= \int_{z_0}^{z_0+2}\int_0^{2\pi} \vec{F}\left(T(z,\theta)\right)\cdot\left(T_z\times T_\theta\right)\; d\theta\, dz \\
&= \int_{z_0}^{z_0+2}\int_0^{2\pi} (5\cos\theta, 5\sin\theta, z)\cdot(5\cos\theta, 5\sin\theta, 0)\; d\theta\, dz \\
&= 5\int_{z_0}^{z_0+2} dz \int_0^{2\pi} d\theta
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\iint\limits_S \vec{F}\cdot\vec{ds} = 20\pi}
$$

LOS RESUELTOS DE ALF ←click me!

## Ejercicio 4

La forma de esta región es como un pétalo que apunta hacia el primer cuadrante. Hay varias formas de calcular el área, vamos con la más directa que es parametrizar la región comprendida en el interior de la curva como

$$T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 0) \qquad \begin{cases} r \in [0, \sin 2\theta] \\ \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

Se ha agregado la tercera coordenada para que el producto vectorial esté definido (en $\mathbb{R}^3$). Es claro que trabajar en $\mathbb{R}^2$ o en el "piso" de $\mathbb{R}^3$ es exactamente lo mismo. Entonces

$$\begin{cases} T_r = (\cos\theta, \sin\theta, 0) \\ T_\theta = (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} T_r \times T_\theta &= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= (0,0,r) \end{aligned}$$

Por la definición de área de una superficie en $\mathbb{R}^3$ se tiene

$$\begin{aligned} \mathscr{A}(D) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sin 2\theta} \|T_r \times T_\theta\| \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sin 2\theta} r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left. \frac{r^2}{2} \right|_0^{\sin 2\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\theta \, d\theta \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A}(D) = \frac{\pi}{8}}$$

Otra opción sería utilizar el teorema de Green con un campo $\vec{F}$ tal que $Q_x - P_y = 1$, como por ejemplo $\vec{F} = (0, x)$. El teorema dice que

$$\int_{\partial D^+} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \underbrace{\iint_D \cancelto{1}{(Q_x - P_y)} \, dx \, dy}_{\mathscr{A}(D)}$$

Calculamos entonces la circulación del campo $\vec{F}$ por la curva $C$ que en este caso coincide con $\partial D^+$. Utilizamos la parametrización de $C$ dada por

$$\sigma(\theta) = (\sin 2\theta \cos\theta, \sin 2\theta \sin\theta) \qquad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Me da fiaca derivar $\sigma$, pero debería funcionar.

 

# 5. Parcial del 12/05/2012

## Consigna

### Ejercicio 1

Sea $C$ la curva que es imagen de la función $\sigma : \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}^2$ dada por $\sigma(x) = \left(x, \sqrt{9 - 36x^2}\right)$.

1. Esbozar un diagrama de $C$.
2. Dar una parametrización regular de $C$.
3. ¿Es suave $C$?

### Ejercicio 2

Considerar la siguiente curva $C$ dada como intersección de superficies

$$C = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } x^2 + y^2 = 1\right\} \cap \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } z = xy\right\}$$

orientada de modo que al ser vista desde arriba gire en sentido antihorario o, equivalentemente, de modo que en el punto $(1, 0, 0, )$ el vector tangente unitario sea $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Considerar los campos $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tq $\varphi(x, y, z) = \exp\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$ y $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$\vec{F} = (x, y, z) + \operatorname{grad}(\varphi)$$

1. Dar una parametrización de $C$.
2. Calcular $\int_C \vec{F} \cdot \vec{d\ell}$.

### Ejercicio 3

Sea $C$ la curva en el plano $xy$ que es imagen de $\sigma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ dada por $\sigma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$. Considerar la superficie $S$ que se obtiene al girar la curva $C$ alrededor del eje $x$.

1. Dar una parametrización de la superficie $S$.
2. Calcular el área de la superficie $S$. Sugerencia: $1 - \cos t = 2 \sin^2 \frac{t}{2}$.

### Ejercicio 4

Considerar la función $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1 - |\, x \,|$. Sea $C$ la curva dada por el gráfico de $f$ ( en $\mathbb{R}^2$) orientada desde $(-1, 0) \to (1, 0)$. Calcular

$$\int\limits_C \left(xy^2 - y + 1\right)\, dx + \left(x^2 y + e^{y^2}\right)\, dy$$

# Resolución

## Ejercicio 1

En este caso

$$y = \sqrt{9 - 36x^2} \Rightarrow \frac{y^2}{3^2} + \frac{x^2}{1/2^2} = 1$$

Es evidente entonces que la curva está contenida en una elipse de semiejes $\frac{1}{2}\hat{x}$ y $3\hat{y}$. Por la forma en que se define $\sigma$, es la mitad superior de la elipse.

La parametrización más linda para una elipse es en coordenadas polares, en particular

$$\sigma_2(\theta) = \left(\frac{1}{2}\cos\theta, 3\sin\theta\right) \qquad \theta \in [0, \pi]$$

Notar que si bien la curva es la misma, está recorrida en sentido inverso. Para mostrar que $C$ sí es suave, se debe hallar una parametrización que cumpla con las siguientes tres condiciones

1. $\sigma_2(t) \in C^1[0, \pi]$.
   Es evidente que $\sigma_2 \in C^\infty$ por ser sus coordenadas funciones de este tipo $\checkmark$.

2. $\sigma_2'(t) \neq 0 \, \forall t \in [0, \pi]$.
   $\sigma_2'(t) \neq 0 \iff ||\sigma_2'(t)|| \neq 0 \Rightarrow ||\sigma_2'(t)|| = \sqrt{\frac{1}{4}\sin^2\theta + 9\cos^2\theta}$. $a\cos^2\theta_0 + b\sin^2\theta_0 = 0 \iff \cos\theta_0 = 0 \wedge \sin\theta_0 = 0$. Sabemos que $\nexists \theta_0 \in \mathbb{R}$ que cumpla con esto, por lo tanto $\sigma_2'(t) \neq 0 \forall t \in \mathbb{R}\checkmark$.

3. $\sigma_2(t)$ debe ser inyectiva en $[0, \pi]$.
   Como $\cos\theta$ es inyectivo en el intervalo $[0, \pi]$ entonces $\sigma_2(t)$ es inyectiva $\checkmark$.

Queda demostrado que la curva es suave.

## Ejercicio 2

La curva es la intersección de un cilindro de radio 1 con eje $\hat{z}$ y una superficie rara que va formando parábolas según la inclinación. Entonces una parametrización muy sencilla es

$$\sigma(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, \cos\theta\sin\theta) \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

Notar que en tanto $\theta$ avanza de $0 \to 2\pi$ la parametrización dada gira en sentido antihorario tal como se solicita en la consigna $\checkmark$. Además $C$ es una curva cerrada, simple y suave

1. $\sigma(t) \in C^\infty \checkmark$.

2. $\sigma'(t) = \left(-\sin t, \cos t, \cos^2 t - \sin^2 t\right)$ por lo tanto

$$\begin{aligned} ||\sigma'(t)|| &= \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + \left(\cos^2 t - \sin^2 t\right)^2} \\ &= \sqrt{1 + \left(\cos^2 t - 1 + \cos^2 t\right)^2} \\ &= \sqrt{1 + \left(2\cos^2 t - 1\right)^2} \end{aligned}$$

   Observar que $2\cos^2 t - 1 > 0 \forall t \in \mathbb{R}$ por lo tanto $||\sigma'(t)|| > 0 \forall t \in \mathbb{R}\checkmark$.

3. Dado que las primeras dos coordenadas de $\sigma(t)$ forman un círculo en el plano $x, y$ y esto es inyectivo en el intervalo $[0, 2\pi)$, entonces $\sigma(t)$ es inyectiva $\checkmark$.

4. Como $\sigma(0) = \sigma(2\pi) = (1, 0, 0)$ entonces $C$ es una curva cerrada.

El hecho de que $C$ sea cerrada, simple y suave implica que

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{d\ell} = \int_C (x, y, z) \cdot \vec{d\ell} + \cancelto{0}{\int_C \operatorname{grad}(\phi) \cdot \vec{d\ell}}$$

Si uno es un poco astuto se da cuenta de que

$$(x, y, z) = \text{grad}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2}\right)$$

y con el mismo argumento que antes la integral resulta nula. Entonces

$$\boxed{\int_C \vec{F} \cdot \vec{d\ell} = 0}$$

## Ejercicio 3

Si mal no recuerdo $C$ es la cicloide, aunque no nos debería importar en principio. Nos alcanza con saber que $y \geq 0 \forall t \in [0, 2\pi]$ (la revolución habrá que hacerla con una vuelta completa) y saber que la curva es simple (es decir, no se corta a si misma). El hecho de que la curva es simple lo podemos verificar fácilmente sabiendo que la coordenada $\hat{x}$, es decir $t + \sin t$, es inyectiva. Esto se verifica por el hecho de que su derivada es $\sigma_1'(t) = 1 + \cos t \geq 0 \forall t \in [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ y la igualdad se da en finitos puntos, esto implica que $\sigma_1(t)$ es creciente en todos los puntos salvo una cantidad finita, lo cual resulta en una función inyectiva.

Una parametrización por revolución alrededor del eje $\hat{x}$ es

$$T(t, \theta) = \begin{cases} \hat{x}) & t - \sin t \\ \hat{y}) & (1 - \cos t)\cos\theta \\ \hat{z}) & (1 - \cos t)\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} t \in [0, 2\pi] \\ \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

Ahora nos piden calcular el área de esta superficie. Sinceramente no se me ocurre ningún truco más que plantear la definición y hacer las cuentitas cosa que no voy a hacer.

## Ejercicio 4

En este ejercicio, el campo a integrar es

$$\vec{F} = \left(xy^2 - y + 1, x^2y + e^{y^2}\right)$$

Podemos probar de usar el teorema de Green, cerrando la curva por el segmento que une los extremos, es decir el segmento $(-1, 0) \to (1, 0)$ (recorrido en ese sentido). Entonces, siendo $C_1^+$ la curva de la consigna recorrida "hacia atrás" y $C_2^+$ el segmento recorrido como se ha indicado, se tiene

$$\begin{aligned} \int\limits_{C_1^+ \cup C_2^+} \vec{F} \cdot \vec{d\ell} &= \iint\limits_D (Q_x - P_y)\, dx\, dy \\ &= \iint\limits_D (2xy - 2xy + 1)\, dx\, dy \\ &= \mathscr{A}(D) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Lo que falta es calcular la integral sobre $C_2^+$ para restar y obtener la pedida. Esto debería ser muy fácil ya que $y$ vale 0 sobre dicho segmento y se cancela todo. Para hacerlo formal, parametrizamos

$$\sigma_2(t) = (t, 0) \qquad t \in [-1, 1]$$

y entonces

$$\begin{aligned} \int\limits_{C_2^+} \vec{F} \cdot \vec{d\ell} &= \int\limits_{-1}^{1} \vec{F}(\sigma_2(t)) \cdot \sigma_2'(t)\, dt \\ &= \int\limits_{-1}^{1} \left(t^3 - t + 1\right)\, dt \\ &= 2 \end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned}\int\limits_{C_1^+} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} &= \iint\limits_D (Q_x - P_y)\, dx\, dy - \int\limits_{C_2^+} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \\ &= -1\end{aligned}$$

Como se pide que la curva $C_1$ sea recorrida en sentido opuesto, entonces

$$\boxed{\int\limits_{C} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = 1}$$

# 6. Parcial del 12/05/2012

## Consigna

### Ejercicio 1 (2 pts)

Sea $C$ la curva imagen de la función $\sigma : [0,10] \to \mathbb{R}^3$ dada por $\sigma(t) = \left(12t, 8t^{\frac{3}{2}}, 3t^2\right)$.

1. Mostrar que $C$ es una curva suave.
2. Hallar un punto $P \in C$ de forma que el tramo de curva que comienza en el origen y termina en $P$ tenga longitud igual a 96.

### Ejercicio 2 (3 pts)

Consideremos la curva plana $C$ dada en coordenadas polares por

$$r(\theta) = \theta \qquad \theta \in [0, \pi]$$

y sea $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ el campo vectorial dado por $\vec{F} = \left(\sin x + 2xy - y, e^{y^2} + x^2\right)$.

Calcular $\int_C \vec{F} \cdot \vec{d\ell}$ orientando a $C$ de manera que empiece en $(0,0)$ y termine en $(-\pi, 0)$.

### Ejercicio 3 ($2{,}5$ pts)

Calcular el flujo del campo $\vec{F} = (y, -x, 1)$ a través de la superficie cilíndrica con tapa superior que es unión de dos superficies $S_1$ y $S_2$ donde $S_1$ es el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ con $z \in [0,1]$ y $S_2$ es la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ con $z \geq 1$, orientada con la normal exterior.

### Ejercicio 4 ($2{,}5$ pts)

Sea

$$\vec{F} = \left(2xze^{x^2 y}, x^2 z e^{x^2 y}, e^{x^2 y} + y\right)$$

y sea sea $E$ el elipsoide de ecuación $\left\{\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} + z^2 = 1\right\}$. Hallar la integral de línea del campo $\vec{F}$ en la curva $C = E \cap \{x = 0\}$. Orientar la curva $C$ de modo que el recorrido desde el punto $(0,4,0)$ al punto $(0,0,1)$ sea lo más corto posible.

# Resolución

## Ejercicio 1

$C$ será suave (de acuerdo a nuestra definición) $\iff$ se cumplen las siguientes condiciones

1. $\sigma(t)$ es inyectiva en el intervalo $[0, 10]$.
   Todas las componentes de $\sigma(t)$ son inyectivas individualmente en el intervalo $[0, 10]$. Esto se puede ver fácilmente comprobando que sus derivadas son siempre mayores que cero en $(0, 10]$. Otra forma de probarlo es que si $||\sigma(t)||$ es inyectiva $\Rightarrow \sigma(t)$ es inyectiva. En este caso
   $$||\sigma(t)|| = \sqrt{144t^2 + 64t^3 + 9t^4}$$
   y es claro que se trata de una función estrictamente creciente en el intervalo $[0, 10]$ (es la raíz cuadrada de una sumatoria de términos crecientes), por lo tanto $\sigma(t)$ es inyectiva en el intervalo $[0, 10]\checkmark$.

2. $\sigma(t) \in C^1$ en el intervalo $[0, 10]$.
   La primera derivada de $\sigma$ es $\sigma'(t) = \left(12, 12t^{\frac{1}{2}}, 6t\right)$ que está bien definida para todo $t \in \mathbb{R}$ por lo que $\sigma(t) \in C^1\checkmark$.

3. $||\sigma'(t)|| \neq 0$ en el intervalo $[0, 10]$.
   Es claro que este punto se cumple ya que $||\sigma'(t)|| = \sqrt{12 + \boxed{\text{algo} > 0}} \neq 0 \forall t \in \mathbb{R}\checkmark$.

Básicamente se está pidiendo en el punto 2 es hallar $P = \sigma(t_P)$ tal que

$$\mathscr{L}\left(C[0 \to P]\right) = 96$$

Esto no es más que aplicar la definición

$$\int_0^{t_P} ||\sigma'(t)||\ dt = 96$$

Desarrollando la cuenta se obtiene

$$\begin{aligned}\int_0^{t_P} \sqrt{144t^2 + 64t^3 + 9t^4}\, dt &= \int_0^{t_P} t\sqrt{9t^2 + 64t + 144}\, dt \\ &= \ ?\end{aligned}$$

Lamentablemente no tengo idea cómo resolver dicha integral y no dispongo de una tabla de integrales como para buscar.

Una alternativa que se podría utilizar es el teorema de Stokes buscando una superficie tal que parte de su borde sea $C$, pero el problema es que si dicha superficie no es un plano (o algo sencillo) encontrar un campo tal que rot $\left(\vec{F}\right)$ sea lo que buscamos es muy difícil.

## Ejercicio 2

Observar que

$$Q_x - P_y = 1$$

por lo tanto es evidente encarar el problema con el teorema de Green que nos dice que

$$\begin{aligned}\int_{\partial D^+} \vec{F} \cdot \vec{d\ell} &= \iint_D \left(Q_x - P_y\right)\, dx\, dy \\ &= \iint_D dx\, dy \\ &= \mathscr{A}\left(D\right)\end{aligned}$$

En este caso $\partial D^+ = C_1^+ \cup C_2^+$ donde $C_1^+ = C$ tal como se da en la consigna y $C_2^+$ es el segmento $(-\pi, 0) \to (0, 0)$. Lo único malo es que $C_1^+$ es como un espiral, por lo tanto calcular el área de $D$ puede ser un poco complicado, pero vamos a intentarlo con la definición. Una parametrización directa de $D$ es

$$T(r, \theta) = (r \cos\theta, r \sin\theta) \qquad \begin{cases}\theta \in [0, \pi] \\ r \in [0, \theta]\end{cases}$$

$$\begin{cases} T_r = (\cos\theta, \sin\theta) \\ T_\theta = (-r\sin\theta, r\cos\theta) \end{cases}$$

Ahora podemos pasar a $\mathbb{R}^3$ y usar la definición de $\mathscr{A}(\cdot)$ vista en clase, con lo cual

$$\text{En } \mathbb{R}^3 \to \begin{cases} T_r = (\cos\theta, \sin\theta, 0) \\ T_\theta = (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0) \end{cases}$$

$$T_r \times T_\theta = (0, 0, r)$$

entonces

$$\begin{aligned} \mathscr{A}(D) &= \int_0^\pi \int_0^\theta \|T_r \times T_\theta\| \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^\pi \int_0^\theta r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^\pi \frac{\theta^2}{2} \, d\theta \\ &= \frac{\pi^3}{6} \end{aligned}$$

Ahora falta evaluar la integral sobre el segmento que cierra la curva. Esto es

$$\begin{aligned} \int_{C_2^+} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} &= \int_{-\pi}^{0} \vec{F}(\sigma_2(t)) \cdot \sigma_2'(t) \, dt \\ &= \int_{-\pi}^{0} \vec{F}(t, 0) \cdot (1, 0) \, dt \\ &= \int_{-\pi}^{0} \sin t \, dt \\ &= 1 \end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned} \int_{C_1^+} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} &= \iint_D (Q_x - P_y) \, dx \, dy - \int_{C_2^+} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \\ &= \frac{\pi^3}{6} - 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\int_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \frac{\pi^3}{6} - 1}$$

## Ejercicio 3

Este ejercicio se resuelve con el teorema de la divergencia de Gauss, pero como aún no lo vimos y no me lo van a tomar, no lo hago.

 

## Ejercicio 4

No estoy encontrando la forma de escribir a $\vec{F}$ en términos del gradiente de algún campo escalar, así que vamos en el superpoderoso rotor a ver qué surge

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\left(\left(2xze^{x^2y}, x^2ze^{x^2y}, e^{x^2y}\right)\right) &= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xze^{x^2y} & x^2ze^{x^2y} & e^{x^2y} \end{vmatrix} \\
&= \begin{cases} \hat{x} & x^2e^{x^2y} - x^2e^{x^2y} \\ \hat{y} & 2xe^{x^2y} - 2xe^{x^2y} \\ \hat{z} & 2xze^{x^2y} + x^4yze^{x^2y} - 2x^3ze^{x^2y} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \hat{x} & 0 \\ \hat{y} & 0 \\ \hat{z} & ze^{x^2y}\left(x^4y - 2x^3 + 2x\right) \end{cases}
\end{aligned}$$

A pesar de que el campo no es 100 % conservativo, no hay problema, porque la curva sobre la que hay que integrar se encuentra en el plano $x = 0$ y es justamente la coordenada $x$ la que tiene problemas, con lo cual finalmente se cancelará todo. Otra forma de verlo es utilizar el teorema de Green en el plano $yz$ y descartar por completo la coordenada $x$, en la cual no nos movemos. La forma más profesional sería utilizar el teorema de Stokes.

Como al fin y al cabo $x = 0$ (observar que se cancela todo), voy a ir en forma bien cuadrada y usar la definición

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_0^{2\pi} \vec{F}\left(\sigma(t)\right) \cdot \sigma'(t)\, dt$$

donde

$$\sigma(t) = (0, 4\cos\theta, \sin\theta) \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

es una parametrización regular de $C$ que induce la orientación solicitada. Entonces

$$\begin{aligned}
\int_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell} &= \int_0^{2\pi} (0, 0, 1 + 4\cos\theta) \cdot (0, -4\sin\theta, \cos\theta)\; d\theta \\
&= \cancelto{0}{\int_0^{2\pi} \cos\theta\, d\theta} + 4\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta
\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = 4\pi}$$

# Parte II
# Segundos Parciales

# 7. Parcial del 07/07/2012

## Consigna

### Ejercicio 1

La curva $C$ es la intersección entre el cilindro y el plano dados a continuación

$$C = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } x^2 + z^2 = 1\right\} \cap \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } x + y = 1\right\}$$

$C$ está orientada de modo que en el punto $(1, 0, 0)$ el vector tangente es $(0, 0, 1)$. Si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es una función escalar con $\frac{\partial f}{\partial z} = z$, calcular

$$\int\limits_C f(x, y, z)\, dx + xy\, dy + xz\, dz$$

### Ejercicio 2

Encontrar una solución de

$$\begin{cases} xy' + y = y^2 \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

### Ejercicio 3

Encontrar las soluciones de

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 4y = e^{-3x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

y calcular su límite cuando $x \to +\infty$.

### Ejercicio 4

Dado el sistema

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = 5x - 4y \end{cases}$$

- Encontrar todas las soluciones.
- Esbozar el diagrama de fases.

# Resolución

## Ejercicio 1

Lo que se pide es

$$\int_C f(x,y,z)\ dx + xy\,dy + xz\,dz = \int_C \vec{F}\cdot d\vec{\ell}$$

con $\vec{F}(x,y,z) = (f, xy, xz)$ (lo paso a notación vectorial porque me parece más lindo). El gran Stokes nos dice que

$$\int_{C^+} \vec{F}\cdot d\vec{\ell} = \iint_S \operatorname{rot}\left(\vec{F}\right)\cdot d\vec{s}$$

donde $C^+ = \partial S$. Veamos si funciona

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\left(\vec{F}\right) &= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ f & xy & xz \end{vmatrix} \\
&= \begin{cases} \hat{x}) & 0 \\ \hat{y}) & z - z = 0 \\ \hat{z}) & y - \frac{\partial f}{\partial y} \end{cases} \\
&= \left(0, 0, y - \frac{\partial f}{\partial y}\right)
\end{aligned}$$

La integral sobre $S$ solo la vamos a poder conocer si su normal es $\hat{\eta}_S = (\eta_x, \eta_y, 0)$ (así se cancela todo). La superficie $S$ tal que $C^+ = \partial S$ tiene como normal al mismo vector que el plano que nos dan en la consigna para la intersección, es decir

$$\hat{\eta}_S = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$$

Como $d\vec{s} = \hat{\eta}\,||T_u \times T_v||\,du\,dv$ donde $T(u,v): D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es una parametrización regular de $S$ entonces al evaluar la integral de Stokes se obtiene

$$\iint_S \operatorname{rot}\left(\vec{F}\right)\cdot d\vec{s} = \iint_S \operatorname{rot}\left(\vec{F}\right)\cdot\hat{\eta}\,||T_u \times T_v||\,du\,dv$$

y como

$$\operatorname{rot}\left(\vec{F}\right)\cdot\hat{\eta} \equiv 0$$

entonces toda la integral es cero. Por lo tanto

$$\boxed{\int_C f(x,y,z)\ dx + xy\,dy + xz\,dz = 0}$$

## Ejercicio 2

La ecuación se puede reescribir como

$$x\frac{dy}{dx} + y - y^2 = 0 \Rightarrow \left(y - y^2\right)dx + x\,dy = 0$$

La misma será una ecuación exacta $\iff Q_x = P_y$ donde $\begin{cases} P(x,y) = y - y^2 \\ Q(x,y) = x \end{cases}$. Claramente no es exacta, pero quizás sea reducible a exacta. Para ello buscamos un factor integrante $\mu = \mu(x,y)$ tal que

$$\mu\left(P\,dx + Q\,dy\right) = 0 \text{ es exacta } \iff \frac{\partial}{\partial y}(\mu P) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu Q) \qquad \mu \neq 0$$

Si se desarrolla esta expresión se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu P) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu Q) \iff \mu_y P + \mu P_y = \mu_x Q + \mu Q_x \iff \mu_y P - \mu_x Q = \mu(Q_x - P_y)$$

Primero veamos si existe un $\mu$ tal que dependa solo de una variable, es decir que buscamos $\mu = \mu(x)$ o $\mu = \mu(y)$. Supongamos que $\mu = \mu(x)$, entonces

$$\cancel{\mu_y P} - \mu_x Q = \mu(Q_x - P_y) \iff \frac{\mu_x}{\mu} = \frac{P_y - Q_x}{Q} \iff \frac{P_y - Q_x}{Q} = f(x) \qquad Q \neq 0$$

Si realizamos la operación

$$\frac{P_y - Q_x}{Q} = \frac{1 - 2y - 1}{x} \neq f(x) \Rightarrow \nexists \mu = \mu(x)$$

Si asumimos que $\mu = \mu(y)$ entonces

$$\mu_y P - \cancel{\mu_x Q} = \mu(Q_x - P_y) \iff \frac{\mu_y}{\mu} = \frac{P_y - Q_x}{P} \iff \frac{P_y - Q_x}{P} = f(y) \qquad P \neq 0$$

y en este caso

$$\frac{P_y - Q_x}{P} = \frac{1 - 2y - 1}{y - y^2} = f(y) \Rightarrow \exists \mu = \mu(y) \checkmark \qquad \begin{cases} \mu \neq 0 \\ y - y^2 \neq 0 \end{cases}$$

Ahora que sabemos que existe nos restringimos a buscar a $\mu = \mu(y)$ resolviendo la ecuación diferencial

$$\mu' = \mu \frac{2y}{y - y^2}$$

que es de variables separables

$$\frac{d\mu}{dy} = \mu \frac{2y}{y - y^2} = \mu \frac{2}{1 - y} \qquad \begin{cases} \mu \neq 0 \\ y \neq 1 \end{cases}$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{d\mu}{\mu} &= dy\,\frac{2}{1-y} \\ \ln|\mu| &= 2\ln\left|\frac{1}{1-y}\right| + c && \begin{cases} \mu \neq 0 \\ y \neq 1 \\ c \in \mathbb{R} \end{cases} \\ |\mu| &= k\left|\frac{1}{1-y}\right|^2 && \begin{cases} \mu \neq 0 \\ y \neq 1 \\ k > 0 \end{cases} \\ \mu &= k_2\left(\frac{1}{1-y}\right)^2 && \begin{cases} \mu \neq 0 \\ y \neq 1 \\ k_2 \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Habiendo encontrado al factor integrante, procedemos a resolver la ecuación diferencial

$$\mu(P\,dx + Q\,dy) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \cancel{k_2}\left(\frac{1}{1-y}\right)^2\left((y - y^2)\,dx + x\,dy\right) &= \frac{y - y^2}{(1-y)^2}dx + \frac{x}{(1-y)^2}dy \\ &= \frac{y\cancel{(1-y)}}{(1-y)^{\cancel{2}}}dx + \frac{x}{(1-y)^2}dy \\ &= \frac{y}{1-y}dx + \frac{x}{(1-y)^2}dy \end{aligned}$$

 

Como es una ecuación exacta, entonces si encontramos una $f(x,y)$ tal que $\operatorname{grad}(f(x,y)) = \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix}$ entonces las soluciones de la ecuación serán las curvas de nivel de $f$, es decir $f(x,y) = \text{cte}$. Planteamos entonces

$$\operatorname{grad}(f(x,y)) = \begin{bmatrix} \frac{y}{1-y} \\ \frac{x}{(1-y)^2} \end{bmatrix} \iff \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{y}{1-y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{x}{(1-y)^2} \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{1-y} \iff f(x,y) = \int \frac{y}{1-y}\,dx + g(y) = \frac{xy}{1-y} + g(y)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{x}{1-y} + \frac{xy}{(1-y)^2} + \frac{\partial g}{\partial y} \\ &= x\left(\frac{1-y+y}{(1-y)^2}\right) + \frac{\partial g}{\partial y} \\ &= \frac{x}{(1-y)^2} + \frac{\partial g}{\partial y} \end{aligned}$$

y como $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{(1-y)^2}$ entonces $\frac{\partial g}{\partial y} = 0$ por lo que $g(y) = 0$ y

$$f(x,y) = \frac{xy}{1-y}$$

Finalmente, las soluciones de la ecuación serán las curvas de nivel de $f$, es decir

$$\frac{xy}{1-y} = k \qquad k \in \mathbb{R}$$

Si se despeja $y$ se obtiene

$$y(x) = \frac{1}{1+kx} \qquad \begin{cases} k \in \mathbb{R} \\ x \in \begin{cases} I_1 = \left(-\infty, \frac{-1}{k}\right) \\ I_2 = \left(\frac{-1}{k}, +\infty\right) \end{cases} \end{cases}$$

Para verificar si el ejercicio está bien resuelto, metemos eso en la ecuación de la consigna

$$y'(x) = \frac{-k}{(1+kx)^2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow xy' + y - y^2 &= \frac{-xk}{(1+kx)^2} + \frac{1}{1+kx} - \frac{1}{(1+kx)^2} \\ &= \frac{-xk}{(1+kx)^2} + \frac{1+kx-1}{(1+kx)^2} \\ &= \frac{kx-kx}{(1+kx)^2} \\ &= 0\checkmark \end{aligned}$$

Bueno, pareciera que está bien resolvido el ejercicio, así que ahora buscamos $k$ tal que

$$y(x=1) = 2 \iff \frac{1}{1+k} = 2 \iff k = -\frac{1}{2}$$

Para concluir, la solución (única por teorema de unicidad) del problema es

$$\begin{cases} xy' + y = y^2 \\ y(1) = 2 \end{cases} \iff \boxed{y(x) = \frac{1}{1-\frac{x}{2}} \qquad x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)}$$

## Ejercicio 3

La ecuación a resolver entra en la categoría de "ecuación diferencial ordinaria lineal de segundo orden con coeficientes constantes no homogénea", es decir aquellas de la forma

$$y'' + by' + cy = d(x) \qquad \begin{cases} b, c \in \mathbb{R} \neq b(x), c(x) \\ y = y(x) \end{cases}$$

Para hacer esto voy a pasar al sistema de orden 1 y dimensión 2 asociado ya que requiere menos magia. El mismo se obtiene proponiendo

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix}$$

de forma tal que la primera coordenada de las soluciones del sistema

$$\vec{y}' = \mathscr{A}\vec{y} + \vec{b} \qquad \mathscr{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c & -b \end{bmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ d(x) \end{bmatrix}$$

coincide con las soluciones del sistema pedido. Para resolverlo se propone una solución de la forma

$$\vec{y}(x) = \vec{y}_h(x) + \vec{y}_p(x)$$

donde $\vec{y}_h$ es una de las soluciones del homogéneo asociado e $\vec{y}_p$ es la solución particular. Para encontrar las soluciones del homogéneo planteamos

$$\vec{y}_h' = \mathscr{A}\vec{y}_h$$

y proponemos, como es usual, una solución de la forma $\vec{y}_h = e^{\lambda x}\vec{\xi}$ donde $\lambda \in \mathbb{C}$ y $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^2$. Al introducir esto en la ecuación de obtiene

$$\cancel{e^{\lambda x}}\lambda\vec{\xi} = \mathscr{A}\vec{\xi}\cancel{e^{\lambda x}}$$

con lo cual el problema se reduce a encontrar los autovalores y autovectores de $\mathscr{A}$. Entonces

$$\mathscr{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \det\left(\mathscr{A} - \lambda\mathscr{I}\right) = 0$$

$$\begin{aligned} \det\left(\mathscr{A} - \lambda\mathscr{I}\right) &= \det\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -4 & -4-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (-\lambda)(-4-\lambda) + 4 \\ &= \lambda^2 + 4\lambda + 4 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -2 \end{aligned}$$

Buscamos ahora el autoespacio asociado a $\lambda = -1$ según

$$\begin{aligned} S_{\lambda=-2} &= \text{Nu}\left(\mathscr{A} - \lambda\mathscr{I}\right) \\ &= \text{Nu}\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}\right) \\ &= \text{Nu}\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\right) \checkmark \\ &= \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}\right\} \end{aligned}$$

Entonces elegimos un $\vec{\xi}_1$ tal que $\vec{\xi}_1 \in S_{\lambda=-2}$, por ejemplo

$$\vec{\xi}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Lamentablemente no existe una base de $\mathbb{R}^2$ compuesta por autovectores de $\mathscr{A}$ por lo que habrá que hacer el truco para encontrar $\vec{\xi}_2$ tal que

$$\begin{aligned} \left(\mathscr{A} - \lambda\mathscr{I}\right)\vec{\xi}_2 &= \vec{\xi}_1 \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}\vec{\xi}_2 &= \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\vec{\xi}_2 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{\xi}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

de forma tal que la solución es

$$\begin{aligned} \vec{y}_h(t) &\in \operatorname{gen}\left\{e^{\lambda t}\vec{\xi}_1, e^{\lambda t}\left(t\vec{\xi}_1 + \vec{\xi}_2\right)\right\} \\ &\in \operatorname{gen}\left\{e^{-2t}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, e^{-2t}\left(t\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right)\right\} \end{aligned}$$

Para estar seguros de que venimos bien, veamos si esto cumple $\vec{y}_h' = \mathscr{A}\vec{y}_h$

$$\begin{cases} \vec{y}_h = c_1 e^{-2t}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + c_2 e^{-2t}\left(t\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) & c_1, c_2 \in \mathbb{R} \\ \dfrac{d}{dt}\vec{y}_h = -2c_1 e^{-2t}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + c_2 t e^{-2t}\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} + c_2 e^{-2t}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \vec{y}_h' &= \mathscr{A}\vec{y} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}\left(c_1 e^{-2t}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + c_2 e^{-2t}\left(t\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right)\right) \\ &= c_1 e^{-2t}\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} + c_2 e^{-2t}\left(t\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= -2c_1 e^{-2t}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + c_2 t e^{-2t}\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} + c_2 e^{-2t}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \checkmark \end{aligned}$$

Habiendo confirmado que la $\vec{y}_h$ encontrada es correcta, utilizamos el método de variación de los parámetros para hallar $\vec{y}_p$. Sin hacer ninguna demostración (ya se hizo en clase) sabemos que

$$\vec{y}_p = \mathscr{Q}(t)\vec{c}(t)$$

donde $\vec{c}(t)$ satisface

$$\mathscr{Q}(t)\frac{d}{dt}\vec{c}(t) = \vec{b}(t) \Rightarrow \frac{d}{dt}\vec{c}(t) = \mathscr{Q}^{-1}(t)\vec{b}(t)$$

con $\mathscr{Q}$ la matriz fundamental de soluciones cuyas columnas son la base del subespacio de $\vec{y}_h$. Entonces, usando

$$\mathscr{Q}^{-1} = \frac{1}{\det \mathscr{Q}}\begin{bmatrix} q_{22} & -q_{12} \\ -q_{21} & q_{11} \end{bmatrix}$$

se tiene

$$\mathscr{Q}(t) = e^{-2t}\begin{bmatrix} 1 & t+1 \\ -2 & -2t-1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathscr{Q}^{-1}(t) \begin{aligned}[t] &= \frac{e^{2t}}{-2t-1+2t+2}\begin{bmatrix} -2t-1 & 2 \\ -t-1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= e^{2t}\begin{bmatrix} -2t-1 & 2 \\ -t-1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

y siendo $\vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-3x} \end{bmatrix}$ entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\vec{c}(t) &= \mathscr{Q}^{-1}(t)\vec{b}(t) \\ &= e^{2t}\begin{bmatrix} -2t-1 & 2 \\ -t-1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ e^{-3t} \end{bmatrix} \\ &= e^{-t}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Es trivial ver que

$$\vec{c} = e^{-t}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

 

y finalmente

$$\begin{aligned}\vec{y}_p(t) &= \mathscr{Q}(t)\vec{c}(t)\\ &= e^{2t}\begin{bmatrix} -2t-1 & 2\\ -t-1 & 1\end{bmatrix} e^{-t}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\\ &= e^{t}\begin{bmatrix} -4t-2+2\\ -2t-2+1\end{bmatrix}\\ &= e^{t}\begin{bmatrix} -4t\\ -2t-1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Listo, hemos resuelto el sistema asociado. Como planteamos que el cambio de variables desde la ecuación hacia el sistema era $\vec{y}=\begin{bmatrix} y\\ y'\end{bmatrix}$ entonces la solución de la ecuación es la primera coordenada de la solución del sistema, es decir

$$y(t)=y_h(t)+y_p(t) \qquad \begin{cases} y_h = c_1e^{-2t}+c_2e^{-2t}\,(t+1) & c_1,c_2\in\mathbb{R}\\ y_p=-4te^{t} \\ t\in\mathbb{R}\end{cases}$$

Para verificar que las soluciones estén bien obtenidas, derivamos dos veces y lo metemos en la ecuación. La verdad es que no tengo ganas, voy a asumir que lo hice bien. Si imponemos las condiciones iniciales

$$y(t=0)=0\Rightarrow c_1+c_2=0$$

y por otro lado

$$y'(t)=-2c_1e^{-2t}+c_2\left(-2e^{-2t}(t+1)+e^{-2t}\right)-4\left(e^{t}+te^{t}\right)$$
$$y'(t=0)=-1\Rightarrow -2c_1+-c_2-4=-1$$

De ahí se obtiene $c_1$ y $c_2$. El límite es, independientemente de las constantes y asumiendo que resolví todo bien

$$\lim_{t\to+\infty} y(t)=+\infty$$

aunque no estoy seguro, la intuición me dice que debería ser finito.

## Ejercicio 4

Llamando $\vec{x}=\begin{bmatrix} x\\ y\end{bmatrix}$ entonces el sistema es

$$\begin{aligned}\vec{x}' &= \mathscr{A}\vec{x}\\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1\\ 5 & -4\end{bmatrix}\vec{x}\end{aligned}$$

El mismo no está desacoplado ya que “las coordenadas se mezclan” en ambas ecuaciones. Para resolverlo proponemos

$$\vec{x}(t)=\vec{x}_h(t)+\vec{x}_p(t)$$

Dado que en este caso el sistema es homogéneo (no hay un $\vec{b}(t)$ como en el anterior) entonces $\vec{x}_p(t)=\vec{0}$.

Para hallar $\vec{x}(t)=\vec{x}_h(t)$ proponemos $\vec{x}(t)=\vec{\xi}e^{\lambda t}$ y al introducirlo en la ecuación del sistema el problema se reduce a hallar los autovalores y autovectores. Para hallar los autovalores de $\mathscr{A}$ hacemos

$$\begin{aligned}\det\left(\mathscr{A}-\lambda\mathscr{I}\right)=0\Rightarrow \det\left(\mathscr{A}-\lambda\mathscr{I}\right) &= \det\begin{bmatrix} -\lambda & 1\\ 5 & -4-\lambda\end{bmatrix}\\ &= -\lambda\left(-4-\lambda\right)-5\\ &= \lambda^2+4\lambda-5\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1=1\\ \lambda_2=-5\end{cases}\end{aligned}$$

Buscamos los autoespacios asociados

$$S_{\lambda=1} = \text{Nu}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$$S_{\lambda=-5} = \text{Nu}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

y entonces las soluciones del sistema son

$$\boxed{\vec{x}(t) = c_1 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-5t}\begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$$

Para esbozar el diagrama de fases procedemos igual que en clase, primero lo hacemos en las coordenadas

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} c_1 e^t \\ c_2 e^{-5t} \end{bmatrix}$$

y luego pasamos a $\vec{x}$. En la figura 1 se encuentra el diagrama de fases.

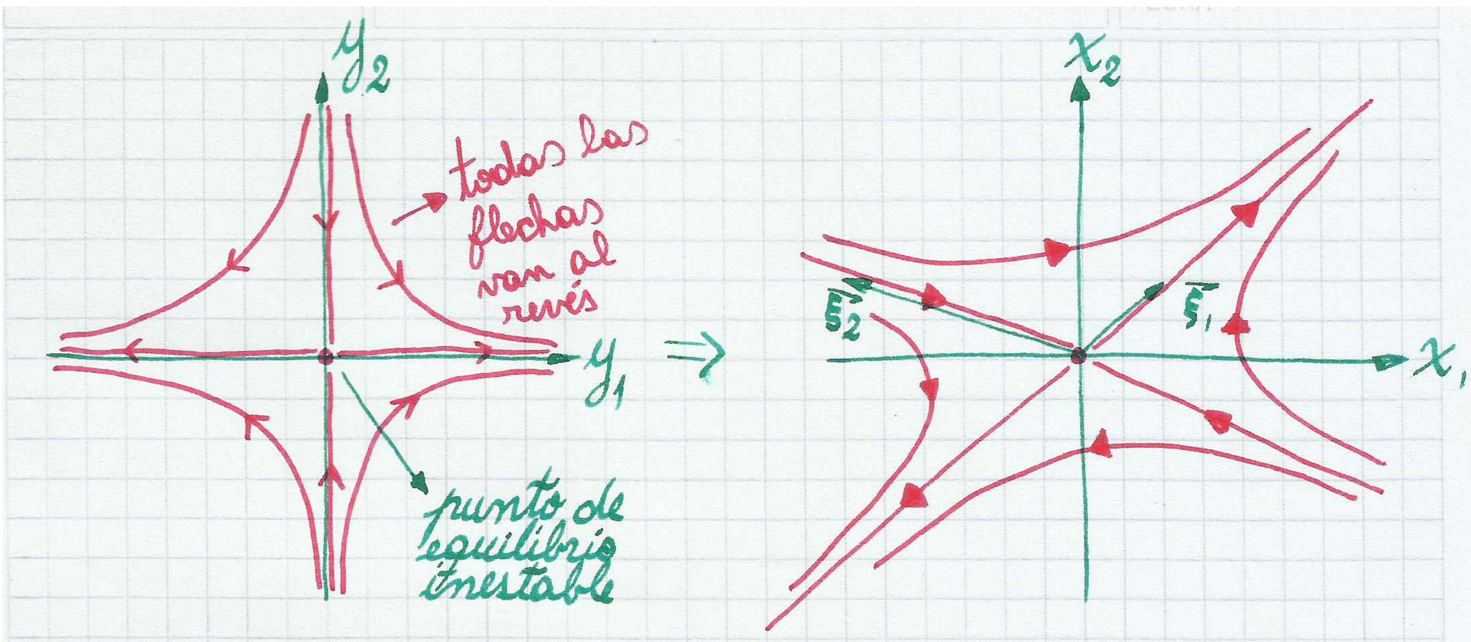


**Figura 1:** Diagrama de fases.

# 8. Parcial del 06/07/2013

## Consigna

### Ejercicio 1

Sea $\vec{F}(x,y,z) = \left(e^{\sin y}, \frac{1}{(x^2+z^2+1)^3} + y, z+1\right)$. Calcular $\int_S \vec{F} \cdot \vec{ds}$ donde $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } x^2+y^2+x^2 = 1, z \geq 0\right\}$ está orientada con la normal que tiene coordenada $z > 0$.

### Ejercicio 2

Se sabe que la ecuación de primer orden

$$\left(5xy^2 - 2y\right) dx + \left(3x^2y - x\right) dy = 0$$

admite un factor integrante de la forma $x^a y^b$ con $a, b \in \mathbb{N}$. Determine $a$ y $b$ y resuelva la ecuación.

### Ejercicio 3

Considere la ecuación homogénea de segundo orden

$$y'' - \frac{x+2}{x} y' + \frac{x+2}{x^2} y = 0$$

Se sabe que $y_1(x) = x$ es solución.

- Encuentre la solución general de la ecuación para $x > 0$.
- Encuentre la solución general de la ecuación no homogénea

$$y'' - \frac{x+2}{x} y' + \frac{x+2}{x^2} y = x \qquad x > 0$$

### Ejercicio 4

Considerar el sistema de ecuaciones diferenciales $\vec{x}'(t) = \mathscr{A} \vec{x}(t)$ donde

$$\mathscr{A} = \begin{bmatrix} k & 2 \\ 2 & k \end{bmatrix} \qquad \vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

- Hallar $k \in \mathbb{R}$ tal que el sistema tenga una solución de la forma $\vec{x}_1(t) = e^{-t}\vec{u}$ y otra de la forma $\vec{x}_2(t) = e^{3t}\vec{v}$ con $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$.
- Encontrar la solución general y realizar el diagrama de fases correspondiente.

# Resolución

## Ejercicio 1

Dado que el campo $\vec{F}$ es un asco, vamos a probar suerte con el teorema de Gauss que dice

$$\iint\limits_{\partial V} \vec{F} \cdot \vec{ds} = \iiint\limits_{V} \operatorname{div}\left(\vec{F}\right)\, dv$$

donde $\partial V$ es la superficie cerrada orientada con normal saliente que encierra a $V$. En nuestro caso

$$S = \partial V \cup T$$

donde $T$ es la "tapa" de abajo de la esfera orientada con normal "hacia abajo". Entonces

$$\iint\limits_{S} \vec{F} \cdot \vec{ds} = \iiint\limits_{V} \operatorname{div}\left(\vec{F}\right)\, dv - \iint\limits_{T} \vec{F} \cdot \vec{ds}$$

La divergencia de $\vec{F}$ es

$$\operatorname{div}\left(\vec{F}\right) = 2$$

por lo que, en coordenadas esféricas,

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_{V} \operatorname{div}\left(\vec{F}\right)\, dv &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{1} 2\, r^2 \cos\varphi \, dr\, d\varphi\, d\theta \\
&= 2\left(2\pi \sin\varphi\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \left.\frac{r^3}{3}\right|_0^1\right) \\
&= 2\left(2\pi \frac{1}{3}\right) \\
&= \frac{4}{3}\pi
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\iint\limits_{T} \vec{F} \cdot \vec{ds} = \int_{r_0}^{r_1}\int_{\theta_0}^{\theta_1} \vec{F}\left(T(r,\theta)\right) \cdot \hat{\eta}\, ||T_\theta \times T_r||\, d\theta\, dr$$

donde $T(r,\theta) : [r_0, r_1] \times [\theta_0, \theta_1] \to \mathbb{R}^3$ es una parametrización regular de la tapa $T$ y $\hat{\eta}$ un campo de normales a $T$. Una parametrización regular posible de $T$ es

$$T(r,\theta) = r \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} r \in [0,1] \\ \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

y un campo de normales a $T$

$$\hat{\eta} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Entonces $\vec{F} \cdot \hat{\eta} = -z - 1$ y

$$\begin{cases} T_r = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{bmatrix} \\ T_\theta = r \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow T_r \times T_\theta = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r^2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow ||T_r \times T_\theta|| = r^2$$

La integral termina quedando

$$\begin{aligned}\iint\limits_T \vec{F}\cdot\vec{ds} &= \int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi} -r^2 - 1\,d\theta\,dr \\ &= -2\pi\left(\frac{r^3}{3}+r\right)\Big|_0^1 \\ &= -\frac{8}{3}\pi\end{aligned}$$

Finalmente

$$\iint\limits_S \vec{F}\cdot\vec{ds} = \underbrace{\iiint\limits_V \operatorname{div}\left(\vec{F}\right)\,dv}_{\frac{4}{3}\pi} - \underbrace{\iint\limits_T \vec{F}\cdot\vec{ds}}_{-\frac{8}{3}\pi} \Rightarrow$$

$$\boxed{\iint\limits_S \vec{F}\cdot\vec{ds} = 4\pi}$$

## Ejercicio 2

Por lo que nos dicen, la ecuación no es exacta pero sí es reducible a exacta mediante el factor integrante. Dada la ecuación

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

al multiplicarla por el factor integrante se obtiene $\mu\,(P\,dx + Q\,dy) = 0$ y, como es exacta (luego de multiplicarla por $\mu$) entonces

$$\frac{d}{dy}(\mu P) = \frac{d}{dx}(\mu Q)$$

De acá se me ocurre que se podrían obtener los exponentes necesarios para que esto ocurra. Siendo

$$\begin{cases} P(x,y) = 5xy^2 - 2y \\ Q(x,y) = 3x^2y - x \end{cases}$$

entonces

$$\begin{aligned}\frac{d}{dy}(\mu P) &= \frac{d}{dy}\left(x^a y^b\left(5xy^2 - 2y\right)\right) \\ &= \frac{d}{dy}\left(5x^{a+1}y^{b+2} - 2x^a y^{b+1}\right) \\ &= 5x^{a+1}(b+2)\,y^{b+1} - 2x^a(b+1)\,y^b\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\mu Q) &= \frac{d}{dx}\left(x^a y^b\left(3x^2y - x\right)\right) \\ &= \frac{d}{dx}\left(3x^{a+2}y^{b+1} - x^{a+1}y^b\right) \\ &= 3(a+2)\,x^{a+1}y^{b+1} - (a+1)\,x^a y^b\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dy}(\mu P) &= \frac{d}{dx}(\mu Q) \\ 5x^{a+1}(b+2)\,y^{b+1} - 2x^a(b+1)\,y^b &= 3(a+2)\,x^{a+1}y^{b+1} - (a+1)\,x^a y^b\end{aligned}$$

Si pedimos que

$$\begin{cases} 5(b+2) = 3(a+2) \\ -2(b+1) = -(a+1) \end{cases} \equiv \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \end{cases}$$

 

obtenemos

$$\begin{cases} \frac{d}{dy}(\mu P) = 15x^4y^2 - 4x^3y \\ \frac{d}{dx}(\mu Q) = 15x^4y^2 - 4x^3y \end{cases} \quad \checkmark$$

Listo, la ecuación $\mu(P\,dx + Q\,dy) = 0$ es exacta para los valores de $a$ y $b$ obtenidos.

Para encontrar la solución de la ecuación buscamos una $f(x,y)$ tal que $\text{grad}(f(x,y)) = \begin{bmatrix} \mu P(x,y) \\ \mu Q(x,y) \end{bmatrix}$ y entones las curvas $f(x,y) = \text{cte}$ serán las soluciones. Entonces

$$\text{grad}(f(x,y)) = \begin{bmatrix} 5x^4y^3 - 2x^3y^2 \\ 3x^5y^2 - x^4y \end{bmatrix} \iff \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 5x^4y^3 - 2x^3y^2 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 3x^5y^2 - x^4y \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(x,y) &= \int 5x^4y^3 - 2x^3y^2\,dx \\ &= x^5y^3 - \frac{1}{2}x^4y^2 + g(y) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 3x^5y^2 - x^4y + g'(y)$$

Se observa que si $g'(y) = 0$ entonces ya tenemos a $f$. Sus curvas de nivel serán las soluciones, es decir

$$x^5y^3 - \frac{1}{2}x^4y^2 = k \qquad k \in \mathbb{R}$$

Como $\mu(x,y) = 0$ para $\{x = 0\} \cup \{y = 0\}$ entonces creo que habría que excluir todos estos puntos de nuestra solución, aunque no estoy seguro. Ahora que lo pienso, efectivamente hay que descartar estos puntos ya que si $k \neq 0$ entonces es claro que $\{x = 0\} \cup \{y = 0\}$ no corresponden a una solución. Entonces la respuesta es

$$\boxed{x^5y^3 - \frac{1}{2}x^4y^2 = k \qquad \begin{cases} k \in \mathbb{R} \\ x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases}}$$

## Ejercicio 3

Nota No se por qué pero en lugar de $x$ usé $t$. En todo lo que sigue $t \equiv x$.

La ecuación que se pide resolver es una "ecuación diferencial ordinaria de segundo orden con coeficientes no constantes homogénea". Según nos comentaron en clase, no existe un método general para resolver este tipo de ecuaciones. En cambio, siempre asumimos que nos dan una solución (como en la consigna) y nosotros encontramos la otra (al ser de orden dos sabemos que las soluciones del homogéneo $\vec{y}_h$ se encuentran en un espacio de dimensión dos). En el caso más general (no homogéneo) la solución sería

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t)$$

donde $y_p$ es la solución particular e $y_h$ una solución del homogéneo asociado. Como en este caso ya estamos tratando con una ecuación homogénea entonces $y_p = 0$ e $y = y_h$.

Entonces, sabemos que

$$y(t) \in \text{gen}\{y_1(t), y_2(t)\} \qquad \begin{cases} y_1(t) = t & \text{consigna} \\ y_2(t) & \text{a determinar} \end{cases}$$

Para encontrar $y_2(t)$ proponemos que

$$y_2(t) = \mu(t)y_1(t)$$

donde $\mu(t)$ es el factor integrante. En este caso tenemos

$$y_2'(t) = \mu'y_1 + \mu y_1'$$

 

y

$$y_2''(t) = \mu'' y_1 + \mu' y_1' + \mu' y_1' + \mu y_1''$$

Al meter esto en la ecuación

$$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y' = 0$$

se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &= a(t)\left(\mu'' y_1 + 2\mu' y_1' + \mu y_1''\right) + b(t)\left(\mu' y_1 + \mu y_1'\right) + c(t)\mu y_1 \\ &= \mu'' a(t) y_1 + \mu'\left(2a(t)y_1' + b(t)y_1\right) + \mu\cancelto{0}{(a(t)y_1'' + b(t)y_1' + c(t)y_1)} \end{aligned}$$

donde el término que se cancela lo hace ya que $y_1$ es solución de la ecuación. En nuestro caso si reemplazamos

$$\begin{cases} a(t) = 1 \\ b(t) = -\dfrac{t+2}{t} \\ c(t) = \dfrac{t+2}{t^2} \\ y_1(t) = t \end{cases}$$

obtenemos que

$$\mu'' t + \mu'\left(2 - t - 2\right) = 0$$

Realizando un simple cambio de variable $\nu = \mu'$ la ecuación se convierte en

$$\nu' t - \nu t = 0$$

que es una ecuación de variables separables, lo cual es evidente al escribirla como

$$\begin{aligned} \frac{d\nu}{\nu} &= dt \\ \ln|\,\nu\,| &= t + c \\ \nu &= ke^t \qquad k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Dado que $\mu = \int \nu \Rightarrow \mu(t) = ke^t$ por lo que

$$\begin{aligned} y_2(t) &= \mu(t) y_1(t) \\ &= kte^t \end{aligned}$$

Una verificación sencilla del resultado:

$$\begin{aligned} y_2'(t) &= ke^t + kte^t \\ y_2''(t) &= ke^t + ke^t + kte^t \\ &= 2ke^t + kte^t \end{aligned}$$

entonces al introducirlo en la ecuación de la consigna se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &= 2ke^t + kte^t - \frac{t+2}{t}\left(ke^t + kte^t\right) + \frac{t+2}{t^2} kte^t \\ &= 2ke^t + kte^t - \frac{t+2}{t} ke^t - (t+2)\, ke^t + \frac{t+2}{t} ke^t \\ &= ke^t \left(2 - \frac{t+2}{2} + \frac{t+2}{2} - 2\right) + kte^t\,(1-1) \\ &\equiv 0 \checkmark \end{aligned}$$

La solución encontrada satisface la ecuación, por lo tanto podemos estar seguros de que esta bien. De manera formal entonces

$$\boxed{y_h(t) = c_1 t + c_2 t e^t \qquad \begin{cases} t > 0 \\ c_1, c_2 \in \mathbb{R} \end{cases}}$$

Para resolver el caso no homogéneo (y obtener $y_p(t)$) hacemos variación de las constantes tal cual como si se tratara de una ecuación de coeficientes constantes. La cosa es que planteamos que

$$y_p(t) = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t)$$

donde $y_1, y_2$ son la base de soluciones del homogéneo y $c_1, c_2$ funciones a determinar. Luego de hacer un poco de álgebra y magia se llega a que

$$\mathscr{W}(\vec{y})\frac{d}{dt}\vec{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ d(t) \end{bmatrix}$$

donde $\mathscr{W}(\vec{y})$ es la matriz wronskiana de $\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$, $\vec{c} = \begin{bmatrix} c_2 \\ c_2 \end{bmatrix}$ y $d(t) = t$ es lo que está "del otro lado del igual" en la ecuación no homogénea. Entonces

$$\mathscr{W}(\vec{y}) = \begin{bmatrix} t & te^t \\ 1 & e^t + te^t \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow W &= \det \mathscr{W} \\ &= t^2e^t + te^t - te^t \\ &= t^2e^t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathscr{W}^{-1} &= \frac{1}{\det \mathscr{W}} \begin{bmatrix} w_{22} & -w_{12} \\ -w_{21} & w_{11} \end{bmatrix} \\ &= t^{-2}e^{-t} \begin{bmatrix} e^t + te^t & -te^t \\ -1 & t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{d}{dt}\vec{c} &= \mathscr{W}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ d(t) \end{bmatrix} \\ &= t^{-2}e^{-t} \begin{bmatrix} -t^2e^t \\ t^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 \\ e^{-t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ahora integramos para obtener $\vec{c}$

$$\begin{aligned} \vec{c} &= \int \begin{bmatrix} -1 \\ e^{-t} \end{bmatrix} dt \\ &= \begin{bmatrix} -t \\ -e^{-t} \end{bmatrix} + \vec{k} \qquad \vec{k} \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Finalmente

$$y_p(t) = -t^2 - t$$

Nuevamente amerita una verificación rápida metiendo $y_p$ en la ecuación, se obtiene

$$\begin{aligned} t &= -2 - \frac{t+2}{t}(-2t-1) + \frac{t+2}{t^2}\left(-t^2 - t\right) \\ &= -2 - \frac{-2t^2 - 4t - t - 2}{t} + \frac{-t^3 - 2t^2 - t^2 - 2t}{t^2} \\ &= -2 + 2t + 5 + \frac{2}{t} - t - 3 - \frac{2}{t} \\ &= t \checkmark \end{aligned}$$

Bien, solución correcta! La solución general entonces se puede escribir como

$$\boxed{y(t) = y_p(t) + y_h(t) \qquad \begin{cases} y_p(t) = -t^2 - t \\ y_h(t) = c_1 t + c_2 te^t & c_1, c_2 \in \mathbb{R} \\ t > 0 \end{cases}}$$

## Ejercicio 4

Sabemos que las soluciones de un sistema lineal se pueden expresar como

$$\vec{x}(t) \in \text{gen}\left\{e^{\lambda_1 t}\vec{\xi}_1, e^{\lambda_2 t}\vec{\xi}_2\right\}$$

cuando la matriz $\mathscr{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ admite dos autovalores $\lambda_1$ y $\lambda_2$ con autovectores $\vec{\xi}_1$ y $\vec{\xi}_2$ asociados. Pedimos entonces que los autovalores de $\mathscr{A}$ sean 1 y 3 mediante

$$\det\left(\mathscr{A} - \lambda\mathscr{I}\right) = 0 \iff (k-\lambda)^2 - 4 = 0 \iff \lambda^2 - 2k\lambda + k^2 - 4 = 0$$

Las raíces de este polinomio son

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{2k \pm \sqrt{4k^2 - 4k^2 + 16}}{2} \\ &= \frac{2k \pm 4}{2} \\ &= k \pm 2 \end{aligned}$$

Si

$$\boxed{k = 1}$$

entonces $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 3$ y la solución del sistema cumple lo pedido ✓. Ahora solo falta encontrar $\vec{u}$ y $\vec{v}$ que no son más que los autovectores asociados a cada autovalor.

$$S_{\lambda=-1} = \text{Nu}\left(\mathscr{A} + \mathscr{I}\right) = \text{Nu}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$$

$$S_{\lambda=3} = \text{Nu}\left(\mathscr{A} - 3\mathscr{I}\right) = \text{Nu}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

La solución general del sistema es entonces

$$\boxed{\vec{x}(t) = c_1 e^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 e^{3t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$$

El diagrama de fases es el clásico, igual que en la figura 1 de la pagina 39 pero con otros autovectores.

 

# 9. Parcial del 30/11/2013

## Consigna

### Ejercicio 1

Sea $S$ la superficie de ecuación $z = x^2 + y^2$ con $z \leq 4$, sin tapa, orientada con la normal exterior. Consideremos el campo vectorial $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} \dfrac{-2z}{x^2+y^2+z^2+1} + \cos y \\ e^x \\ \dfrac{2x}{x^2+y^2+z^2+1} \end{bmatrix}$$

Calcular $\int_S \vec{F} \cdot \vec{ds}$.

### Ejercicio 2

Encontrar todas las funciones derivables $y = y(x)$ tales que todas las rectas tangentes al gráfico corten al eje $y$ en el triple del opuesto a la ordenada del punto de tangencia.

### Ejercicio 3

Calcular todas las soluciones de la siguiente ecuación diferencial de orden dos

$$xy'' - (x+1)\,y' + y = 2x^2 \qquad x > 0$$

sabiendo que $y = e^x$ es solución de la ecuación homogénea asociada.

### Ejercicio 4

Determinar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ tales que todas las soluciones del sistema

$$\begin{cases} x_1'(t) = -3x_1(t) + ax_2(t) \\ x_2'(t) = ax_1(t) - 3x_2(t) \end{cases}$$

permanezcan acotadas cuando $t \to +\infty$. Para $a = 2$ esbozar el diagrama de fases.

# Resolución

## Ejercicio 1

Voy a probar suerte con el teorema de Gauss, pero no lo veo muy usable. La divergencia del campo es

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\left(\vec{F}\right) &= \frac{4xz}{\left(x^2+y^2+z^2+1\right)^2} - \frac{4xz}{\left(x^2+y^2+z^2+1\right)^2} \\ &= 0\,\heartsuit \end{aligned}$$

Claramente hay que usar Gauss. El teorema de Gauss nos dice que

$$\iint\limits_{\partial V} \vec{F}\cdot\vec{ds} = \iiint\limits_{V} \operatorname{div}\left(\vec{F}\right)\, dv$$

donde $\partial V$ es aquella superficie que encierra al volumen $V \subset \mathbb{R}^3$ orientada con normal saliente. En nuestro caso

$$\partial V = S \cup T$$

donde $S$ es la de la consigna (con la orientación de la consigna) y $T$ es la tapa de arriba con la normal hacia arriba, es decir

$$\hat{\eta}_T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$\iint\limits_{\partial V} \vec{F}\cdot\vec{ds} = \iint\limits_{S} \vec{F}\cdot\vec{ds} + \iint\limits_{T} \vec{F}\cdot\vec{ds}$$

y

$$\iint\limits_{S} \vec{F}\cdot\vec{ds} = \cancelto{0}{\iiint\limits_{V} \operatorname{div}\left(\vec{F}\right) dv} - \iint\limits_{T} \vec{F}\cdot\vec{ds}$$

donde la integral sobre $V$ se cancela ya que $\operatorname{div}\left(\vec{F}\right) = 0$.

Buscamos entonces una parametrización de $T$, a mi se me ocurre

$$T(r,\theta) = \begin{bmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} r \in [0,4] \\ \theta \in [0,2\pi] \end{cases}$$

con

$$\begin{aligned} T_r \times T_\theta &= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|T_r \times T_\theta\| = r^2$$

$$\begin{aligned}
\iint_T \vec{F}\cdot\vec{ds} &= \int_{r_0}^{r_1}\int_{\theta_0}^{\theta_1} \vec{F}\left(T(r,\theta)\right)\cdot\hat{\eta}_\theta \,||T_r\times T_\theta||\,d\theta\,dr\\
&= \int_0^4\int_0^{2\pi} F_3\left(T(r,\theta)\right) r^2\,d\theta\,dr\\
&= \int_0^4\int_0^{2\pi} \frac{2r\cos\theta}{r^2+17} r^2\,d\theta\,dr\\
&= 2\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta\int_0^4 \frac{r^3}{r^2+17}\\
&= 0
\end{aligned}$$

Si bien es loco que todo de 0, es razonable ya que la coordenada $F_z$ es impar en el eje $x$ entonces todo lo que suma de un lado, lo resta del otro. Finalmente

$$\boxed{\iint_S \vec{F}\cdot\vec{ds} = 0}$$

## Ejercicio 2

Si mal no interpreté la consigna, en forma gráfica lo que se pide es lo que está en la figura 2.
Preguntar si está bien interpretado. Me dijo que si.

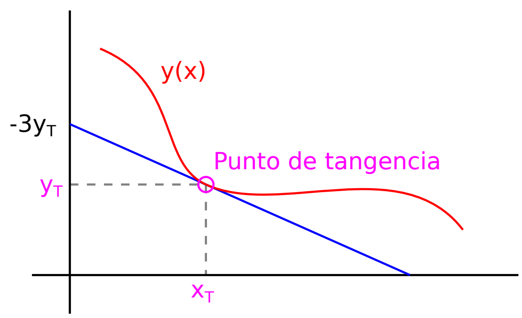


**Figura 2:** Gráfico de lo que se pide en la consigna del ejercicio 2.

## Ejercicio 3

Proponemos una solución de la forma clásica

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

donde $y_h$ resuelve $ty'' - (t+1)\,y' + y = 0$. Sabemos que $y_h$ pertenece a un espacio de dimensión 2 y también sabemos que $y_h(t) = e^t$ resuelve, por lo que

$$y_h(t) \in \text{gen}\left\{e^t, y_2(t)\right\}$$

Para hallar $y_2(t)$ proponemos

$$y_2(t) = \mu(t)e^t$$

donde $\mu(t)$ es el factor integrante a determinar. Para ello introducimos $y_2$ en la ecuación homogénea asociada. Llamando $y_1 = e^t$ entonces

$$\begin{aligned}
y_2'(t) &= \mu' y_1 + \mu y_1'\\
y_2''(t) &= \mu'' y_1 + 2\mu' y_1' + \mu y_1''
\end{aligned}$$

y metiendo esto en la ecuación se obtiene

$$
\begin{aligned}
a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y &= a(t)\left(\mu'' y_1 + 2\mu' y_1' + \mu y_1''\right) + b(t)\left(\mu' y_1 + \mu y_1'\right) + c(t)y_1 \\
&= \mu'' a(t)y_1 + \mu'\left(2a(t)y_1' + b(t)y_1\right) + \mu\cancelto{0}{\left(a(t)y_1'' + b(t)y_1' + c(t)y_1\right)}
\end{aligned}
$$

Lo que se cancela es por el hecho de que $y_1$ es solución del homogéneo. Reemplazando

$$
\begin{cases}
a(t) = t \\
b(t) = -(t+1) \\
y_1' = e^t \\
\mu' = \nu
\end{cases}
$$

entonces

$$
\begin{aligned}
\nu' t e^t + \nu\left(2te^t - (t+1)e^t\right) &= 0 \\
e^t\left(\nu' t + \nu(2t - t - 1)\right) &= 0 \\
\nu' t + \nu(t-1) &= 0
\end{aligned}
$$

Esta ecuación es de variables separables

$$
\begin{aligned}
\frac{d\nu}{\nu} &= \frac{t-1}{t}\,dt \\
\ln|\nu| &= t - \ln|t| + c \\
\nu &= k\frac{e^t}{t} \qquad k \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Se puede verificar metiendo a $\nu$ en $\nu' t + \nu(t-1) = 0$ que la solución es correcta. Dado que $\mu' = \nu$ entonces

$$
\begin{aligned}
\mu &= \int \nu\,dt \\
&= \int k\frac{e^t}{t}\,dt \to \text{calc\_error}
\end{aligned}
$$

Preguntar a dónde me equivoqué que no lo veo... No miró a dónde me equivoqué, pero me dijo que debe haber un error de cuentas. Yo no le encuentro.

## Ejercicio 4

El sistema se puede escribir como $\vec{x}' = \mathscr{A}\vec{x}$ con

$$
\mathscr{A} = \begin{bmatrix} -3 & a \\ a & -3 \end{bmatrix}
$$

En el caso de que existan dos autovalores distintos $\lambda_1$ y $\lambda_2$ de $\mathscr{A}$ entonces las soluciones del sistema se podrán escribir como

$$
\vec{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\vec{\xi}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\vec{\xi}_2
$$

donde $\vec{\xi}_1$ y $\vec{\xi}_2$ son autovectores. Para que permanezcan acotadas cuando $t \to +\infty$ vamos a pedir que $\lambda_1, \lambda_2 < 0$. Los autovalores de $\mathscr{A}$ se obtienen según

$$
\det\left(\mathscr{A} - \lambda\mathscr{I}\right) = 0 \iff \det\begin{bmatrix} -3-\lambda & a \\ a & -3-\lambda \end{bmatrix} = 0 \iff \lambda^2 + 6\lambda - a^2 + 9 = 0
$$

entonces

$$
\begin{aligned}
\lambda_{1,2} &= \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 9 \times 4 + 4a^2}}{2} \\
&= \frac{-6 \pm \sqrt{4a^2}}{2} \\
&= -3 \pm |a| \\
&= \begin{cases} \lambda_1 = -3 + |a| \\ \lambda_2 = -3 - |a| \end{cases}
\end{aligned}
$$

$\lambda_2 < 0 \forall a \in \mathbb{R}\checkmark$. En el caso de $\lambda_1$ debemos pedir que $|\,a\,| < 3$ por lo que

$$\boxed{a \in (-3, 3)}$$

Si $a = 2 \Rightarrow \mathscr{A} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$. En este caso

$$S_{\lambda=-5} = \mathrm{Nu}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$$

$$S_{\lambda=-1} = \mathrm{Nu}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \mathrm{gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

por lo que

$$\vec{x}(t) = c_1 e^{-5t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Llamando

$$\begin{cases} y_1 = c_1 e^{-5t} \\ y_2 = c_2 e^{-t} \end{cases}$$

entonces

$$e^{-t} = \left(\frac{y_1}{c_1}\right)^{\frac{1}{5}} \Rightarrow y_2 = k y_1^{\frac{1}{5}}$$

En la figura 3 se encuentra el diagrama de fases del ejercicio.

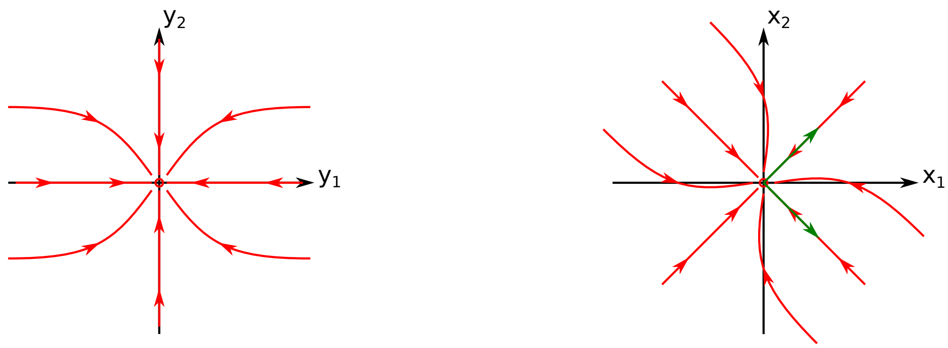


**Figura 3:** Diagrama de fases del ejercicio 4.

# 10. Parcial del 30/11/2013

## Consigna

### Ejercicio 1

Sea $S_b = \left\{ z = (x-b)^2 + y^2, z \leq 1 \right\}$ orientada con la normal que se te cante. Sea

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} e^{yz^2} \\ \sin(xz) \\ x+1 \end{bmatrix}$$

Hallar $b$ tal que $\iint_{S_b} \vec{F} \cdot \vec{ds} = 2\pi$.

### Ejercicio 2

Resolver

$$\begin{cases} \left(x^3 y - 2y^2\right)\, dx + x^4\, dy = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

sabiendo que $\mu = x^a y^b$.

### Ejercicio 3

Sea

$$x'' + (k-4)\, x' - 4kx = 0$$

- Hallar $k$ tal que $te^{4t}$ sea solución.
- Para el valor de $k$ hallado resolver $x'' + (k-4)\, x' - 4kx = e^{4t}$.

### Ejercicio 4

Sea

$$\begin{cases} x' = xy - 4y \\ y' = -xy - x \end{cases}$$

Hallar todos los puntos de equilibrio y decidir si son estables. Esbozar un diagrama de fases.

# Resolución

## Ejercicio 1

Como $\text{div}\left(\vec{F}\right) = 0$ entonces vamos a usar lo que nos enseñó el gran Gauss, es decir

$$\iiint\limits_{V_b} \text{div}\left(\vec{F}\right)\ dv = \pm \iint\limits_{S_b} \vec{F}\cdot\vec{ds} \pm \iint\limits_{T_b} \vec{F}\cdot\vec{ds}$$

donde $T_b$ es la "tapa" que cierra a $S_b$ y $V_b$ el volumen delimitado por ambas superficies. Si se considera normal saliente entonces las dos integrales son positivas, en caso contrario negativas. Asumimos normal saliente y queda

$$\iint\limits_{S_b} \vec{F}\cdot\vec{ds} = \cancelto{0}{\iiint\limits_{V_b} \text{div}\left(\vec{F}\right)\ dv} - \iint\limits_{T_b} \vec{F}\cdot\vec{ds}$$

Una parametrización de $T_b$ podría ser

$$T(r,\theta) = \begin{bmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} r \in [0,1] \\ \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

con lo que, como en todos los casos, $||T_r \times T_\theta|| = r^2$ y $\hat{\eta}_T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ (normal saliente). La integral es entonces

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{S_b} \vec{F}\cdot\vec{ds} &= -\iint\limits_{T_b} \vec{F}\cdot\vec{ds} \\
&= -\int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \vec{F}\left(T(r,\theta)\right)\cdot\hat{\eta}_T\, ||T_r \times T_\theta||\ d\theta\ dr \\
&= -\int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \left(r\cos\theta + b + 1\right) r^2\ d\theta\ dr \\
&= -\int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \left(r^3\cos\theta + r^2(1+b)\right)\ d\theta\ dr \\
&= -\left[2\pi\left(\frac{r^3(1+b)}{3}\Big|_0^1\right) + \frac{r^4}{4}\Big|_0^1 \left(-\sin\theta\big]_0^{2\pi}\right)\right] \\
&= -2\pi\frac{b+1}{3}
\end{aligned}$$

Usando lo que se pide en la consigna

$$\boxed{\iint\limits_{S_b} \vec{F}\cdot\vec{ds} = 2\pi \iff 2\pi = -2\pi\frac{b+1}{3} \to \text{Despejar } b}$$

## Ejercicio 2

Ya hice varios ejercicios así, ver otros parciales.

## Ejercicio 3

Sabemos que las soluciones de la forma $te^{\lambda t}$ son posibles $\iff$ $\lambda = 4$ es la única raíz del polinomio característico de la ecuación. Buscamos un $k$ tal que ocurra eso

$$P(\lambda) = \lambda^2 + (k-4)\lambda - 4k$$

$$\begin{aligned}
\lambda_{1,2} &= \frac{-(k-4)\pm\sqrt{(k-4)^2+16k}}{2}\\
&= \frac{4-k\pm\sqrt{k^2+16-8k+16k}}{2}\\
&= \frac{4-k\pm\sqrt{k^2+8k+16}}{2}\\
&= \frac{4-k\pm\sqrt{(k+4)^2}}{2}\\
&= \frac{4-k\pm|k+4|}{2}
\end{aligned}$$

Pedimos que $\lambda_1 = 4 \wedge \lambda_2 = 4 \Rightarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{4-k+|k+4|}{2} = 4 \\ \dfrac{4-k-|k+4|}{2} = 4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\frac{4-k-|k+4|}{2} &= \frac{4-k+|k+4|}{2}\\
-|k+4| &= |k+4| \iff |k+4| = 0 \iff \boxed{k=-4}
\end{aligned}$$

Al profesor le dio $k=-4$ así que debe estar bien. La ecuación se convierte entonces en

$$x'' - 8x' + 16x = e^{4t}$$

Podemos asumir que ya conocemos la base de soluciones del homogéneo

$$x_h(t) = c_1e^{4t} + c_2te^{4t} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

ya que buscamos $k$ tal que pase eso, aunque nunca está de más una rápida verificación. $x = e^{4t}$ verifica ya que 4 es raíz de $P(\lambda) = \lambda^2 + (k-4)\lambda - 4k$. Para la otra función buscamos sus derivadas

$$\begin{aligned}
\left(te^{4t}\right)' &= e^{4t}(1+4t)\\
\left(te^{4t}\right)'' &= e^{4t}(8+16t)
\end{aligned}$$

entonces

$$x'' - 8x' + 16x = e^{4t}\cancelto{0}{(8+16t-8(1+4t)+16t)}\checkmark$$

Sabiendo que hasta ahora venimos bien, podemos continuar en paz. Para hallar la solución particular hacemos variación de las constantes y buscamos $f_1(t)$ y $f_2(t)$ tales que cumplan

$$\mathscr{W}[x_1(t), x_2(t)]\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} f_1(t)\\ f_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{4t}\end{bmatrix}$$

donde $\mathscr{W}$ es la matriz Wronskiana y $x_1, x_2$ son la base de soluciones del homogéneo. Entonces

$$\left[\begin{array}{cc|c} e^{4t} & te^{4t} & 0 \\ 4e^{4t} & e^{4t}(1+4t) & e^{4t}\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} e^{4t} & te^{4t} & 0 \\ 0 & e^{4t} & e^{4t}\end{array}\right] \Rightarrow f_2'(t) = 1 \qquad f_1'(t) = -t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_1(t) = -\frac{t^2}{2} \\ f_2(t) = t\end{cases} \quad \Rightarrow x_p(t) = -\frac{t^2}{2}e^{4t} + t^2e^{4t} = \frac{1}{2}t^2e^{4t}$$

Ahora habría que meter eso en la ecuación diferencial y verificar que esté bien resuelto, cosa que no tengo ganas de hacer. Le pregunté a Wolfram y me dijo que el resultado es correcto. Finalmente

$$\boxed{x(t) = c_1e^{4t} + c_2te^{4t} + \frac{1}{2}t^2e^{4t} \qquad \begin{cases} c_1, c_2 \in \mathbb{R} \\ t \in \mathbb{R}\end{cases}}$$

## Ejercicio 4

Los puntos de equilibrio son todos aquellos en que

$$\vec{F}(x,y) = \begin{bmatrix} xy - 4y \\ -xy - x \end{bmatrix}$$

se anula, es decir

$$\vec{F}(x,y) = \vec{0} \iff \begin{cases} xy - 4y = 0 \\ xy + x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y(x-4) = 0 \\ x(y+1) = 0 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Habiendo hallado los puntos de equilibrio, utilizamos el teorema de estabilidad lineal que nos dice que el diagrama de fases de $\vec{x}' = \vec{F}(\vec{x})$ en un entorno de un punto de equilibrio $\vec{x}_0$ es parecido al de $\vec{y}' = D\vec{F}(\vec{x}_0)\,\vec{y}$ en un entorno del cero si los autovalores de $D\vec{F}(\vec{x}_0)$ tienen parte real no nula. Calculamos el diferencial de $\vec{F}$ entonces

$$D\vec{F}(\vec{x}) = \begin{bmatrix} y & x-4 \\ -x & -y-1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} D\vec{F}\Big|_{\vec{x}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ D\vec{F}\Big|_{\vec{x}=\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

En el punto $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ los autovalores son

$$\begin{aligned} \det\left(D\vec{F} - \lambda\mathscr{I}\right) &= \det\begin{bmatrix} -\lambda & -4 \\ 0 & -\lambda-1 \end{bmatrix} \\ &= \lambda^2 + \lambda \to \lambda_1 = -1 \qquad \lambda_2 = 0 \end{aligned}$$

Acá tengo que preguntar qué pasa ya que uno de los autovalores tiene parte real nula.

En el punto $\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$ los autovalores son

$$\begin{aligned} \det\left(D\vec{F} - \lambda\mathscr{I}\right) &= \det\begin{bmatrix} -1-\lambda & 0 \\ -4 & -\lambda \end{bmatrix} \\ &= \lambda^2 + \lambda \end{aligned}$$

Lo mismo que antes.

# 11. Parcial del 05/07/2014

## Consigna

### Ejercicio 1

Sea

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4, x^2+y^2 \leq z^2, z \geq 0\right\}$$

y

$$\vec{F}\left(x,y,z\right) = \begin{bmatrix} -x\frac{e^{y^2+z^2}}{\sqrt{1+y^2+z^2}} \\ 3y + \int_0^y \frac{e^{t^2+x^2}}{\sqrt{1+t^2+z^2}}dt \\ 2z \end{bmatrix}$$

Calcular

$$\iint\limits_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{ds}$$

donde la superficie $\partial\Omega$ está orientada con normal interior.

### Ejercicio 2

Hallar los valores de $p, q \in \mathbb{R}$ de forma tal que $\mu(x,y) = x^p y^q$ sea un factor integrante de la ecuación diferencial

$$\left(2y^2 + 4x^2 y\right)\, dx + \left(4xy + 3x^3\right)\, dy = 0$$

y resolver la ecuación diferencial.

### Ejercicio 3

Resolver el siguiente problema

$$\begin{cases} x'' - x' - 12x = e^{4t} \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$$

### Ejercicio 4

Determinar todos los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que todas las soluciones del sistema

$$\begin{cases} x_1' = -4x_1 + \alpha x_2 \\ x_2' = -\alpha x_1 + x_2 \end{cases}$$

satisfagan

$$\lim_{t\to+\infty} \vec{x}(t) = \vec{0}$$

Esbozar el diagrama de fases para $\alpha = \frac{12}{5}$.

# Resolución

## Ejercicio 1

Lo que hay que hacer (como siempre) es Gauss ya que

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\left(\vec{F}\right) &= -\cancel{\frac{e^{y^2+z^2}}{\sqrt{1+y^2+z^2}}} + 3 + \cancel{\frac{e^{y^2+z^2}}{\sqrt{1+y^2+z^2}}} + 2 \\ &= 5\end{aligned}$$

Entonces aplicamos el teorema de Gauss que dice que

$$\iint\limits_{\partial V} \vec{F} \cdot \vec{ds} = \iiint\limits_{V} \operatorname{div}\left(\vec{F}\right)\, dv$$

donde $V$ es una región de volumen y $\partial V$ la superficie que la rodea orientada con normal exterior. Como $\partial\Omega$ está orientada con la normal interior (es decir, calculamos el flujo entrante) entonces

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{ds} &= -\iiint\limits_{\Omega} \operatorname{div}\left(\vec{F}\right)\, dv \\ &= -5 \iiint\limits_{\Omega} dv\end{aligned}$$

La cosa ahora es hallar una parametrización de $\Omega$ y calcular su volumen. La región de volumen es una intersección entre una esfera y un cono en $z \geq 0$ y se puede parametrizar (en coordenadas esféricas) como

$$T(r,\theta,\varphi) = \begin{bmatrix} r\sin\varphi\cos\theta \\ r\sin\varphi\sin\theta \\ r\cos\varphi \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} r \in [0,1] \\ \theta \in [0,2\pi] \\ \varphi \in \left[0,\frac{\pi}{4}\right] \end{cases}$$

Entonces, recordando que el Jacobiano de las coordenadas esféricas es $\left| r^2 \sin\varphi \right|$ y como $\varphi \in \left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ entonces $\sin\varphi > 0$ y podemos sacar el $|\ \ |$

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega} dv &= \int\limits_{r_0}^{r_1}\int\limits_{\theta_0}^{\theta_1}\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_1} r^2\sin\varphi\, d\varphi\, d\theta\, dr \\ &= \int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} r^2\sin\varphi\, d\varphi\, d\theta\, dr \\ &= 2\pi\left(\frac{r^3}{3}\Big]_0^1\right)\left(-\cos\varphi\big]_0^{\frac{\pi}{4}}\right) \\ &= 2\pi\left(\frac{1}{3}-0\right)\left(-\left[\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right]\right) \\ &= \frac{2}{3}\pi\frac{2-\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{2-\sqrt{2}}{3}\pi\end{aligned}$$

Finalmente

$$\boxed{\iint\limits_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{ds} = -5\frac{2-\sqrt{2}}{3}\pi}$$

 

## Ejercicio 2

La ecuación

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

es exacta $\iff$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \iff \text{es exacta}$$

Por lo tanto, para que la ecuación de la consigna sea exacta lo que pedimos es que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}(\mu P) &= \frac{\partial}{\partial x}(\mu Q) \\
\frac{\partial}{\partial y}\left(x^p y^q \left(2y^2 + 4x^2 y\right)\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(x^p y^q \left(4xy + 3x^3\right)\right) \\
\frac{\partial}{\partial y}\left(2x^p y^{q+2} + 4x^{p+2} y^{q+1}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(4x^{p+1} y^{q+1} + 3x^{p+3} y^q\right) \\
2(q+2)\underbrace{x^p y^{q+1}}_{a} + 4(q+1)\underbrace{x^{p+2} y^q}_{b} &= 4(p+1)\underbrace{x^p y^{q+1}}_{a} + 3(p+3)\underbrace{x^{p+2} y^q}_{b}
\end{aligned}$$

Como $a$ y $b$ son linealmente independientes, esta igualdad es posible $\forall x, y \in \mathbb{R} \iff$

$$\begin{cases} 2(q+2) = 4(p+1) \\ 4(q+1) = 3(p+3) \end{cases} \iff \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} p = 1 \\ q = 2 \end{cases}$$

entonces

$$\boxed{\mu(x,y) = x^1 y^2} \to \text{Factor integrante}$$

y la ecuación se convierte en

$$\begin{aligned}
xy^2\left(2y^2 + 4x^2 y\right)\,dx + xy^2\left(4xy + 3x^3\right)\,dy &= 0 \\
\underbrace{\left(2xy^4 + 4x^3 y^3\right)}_{P(x,y)} dx + \underbrace{\left(4x^2 y^3 + 3x^4 y^2\right)}_{Q(x,y)} &= 0
\end{aligned}$$

Observamos que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = 8xy^3 + 12x^3 y^2 \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 8xy^3 + 12x^3 y^2 \end{cases} \to \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow \text{es exacta}\checkmark$$

Para resolver esta ecuación buscamos una $f(x,y)$ tal que $\operatorname{grad}(f(x,y)) = \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix}$ y entonces las soluciones serán las curvas de nivel de $f(x,y)$. Entonces

$$\operatorname{grad}(f(x,y)) = \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} \iff \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = P(x,y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = Q(x,y) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \int P(x,y)\,dx \\
&= \int \left(2xy^4 + 4x^3 y^3\right) dx \\
&= x^2 y^4 + x^4 y^3 + g(y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 y^4 + x^4 y^3 + g(y)\right) \\
&= 4x^2 y^3 + 3x^4 y^2 + g'(y) = Q(x,y) \iff g'(y) = 0
\end{aligned}$$

por lo que

$$f(x,y) = x^2y^4 + x^4y^3$$

y las soluciones de la ecuación de la consigna son las curvas de nivel de $f$, es decir curvas tales que

$$\boxed{x^2y^4 + x^4y^3 = k \qquad \begin{cases} k \in \mathbb{R} \\ x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases}}$$

donde las restricciones sobre $y$ y $x$ se imponen al momento de multiplicar la ecuación por el factor integrante, que se anula en dichas regiones.

## Ejercicio 3

Proponemos, como siempre, una solución de la forma

$$x(t) = x_p(t) + x_h(t)$$

donde $x_p$ es la solución particular y $x_h$ una solución del homogéneo. Comenzamos buscando $x_h$ proponiendo que $e^{\lambda t}$ es solución de

$$x_h'' - x_h' - 12x = 0 \iff e^{\lambda t}\left(\lambda^2 - \lambda - 12\right) = 0 \iff \lambda^2 - \lambda - 12 = 0 \iff \lambda \in \{-3, 4\}$$

por lo tanto, al haber obtenido dos raíces reales y sabiendo que $x_h$ pertenece a un espacio de dimensión 2 (por el teorema) y considerando que $e^{-3t}$ y $e^{4t}$ son li entonces

$$x_h(t) = c_1e^{-3t} + c_2e^{4t} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Para hallar $x_p$ utilizamos el método de variación de las constantes, es decir que proponemos que

$$x_p = c_1(t)e^{-3t} + c_2(t)e^{4t}$$

donde $c_1(t)$ y $c_2(t)$ deben satisfacer

$$\mathscr{W}\left(e^{-3t}, e^{4t}\right)\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{4t} \end{bmatrix}$$

con $\mathscr{W}$ la matriz Wronskiana

$$\mathscr{W} = \begin{bmatrix} e^{-3t} & e^{4t} \\ -3e^{-3t} & 4e^{4t} \end{bmatrix}$$

Triangulamos el sistema para obtener $c_1$ y $c_2$

$$\left[\begin{array}{cc|c} e^{-3t} & e^{4t} & 0 \\ -3e^{-3t} & 4e^{4t} & e^{4t} \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} e^{-3t} & e^{4t} & 0 \\ 0 & 7e^{4t} & e^{4t} \end{array}\right] \Rightarrow c_2'(t) = 7 \qquad c_1'(t) = -e^{7t}$$

por lo que

$$\begin{cases} c_1(t) = -\dfrac{e^{7t}}{7} \\ c_2(t) = 7t \end{cases}$$

por lo que

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \frac{-e^{7t}}{7}e^{-3t} + 7te^{4t} \\ &= e^{4t}\left(7t - \frac{1}{7}\right) \end{aligned}$$

Para verificar que esto esté bien lo introducimos en la ecuación

$$\begin{aligned} x_p'(t) &= 4e^{4t}\left(7t - \frac{1}{7}\right) + 7e^{4t} \\ &= e^{4t}\left(28t + \frac{45}{7}\right) \end{aligned}$$

 

$$\begin{aligned} x_p''(t) &= 4e^{4t}\left(28t+\frac{45}{7}\right)+28e^{4t} \\ &= e^{4t}\left(112t+\frac{199}{7}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x_p''-x_p'-12x_p &= e^{4t}\left[112t+\frac{16}{7}-28t-\frac{45}{7}-84t+\frac{12}{7}\right] \\ &= e^{4t}\left[0t+1\right] \end{aligned}$$

Buen, me confundí en alguna cuenta pero la solución anda por ahí. Concluimos que la solución general del problema es

$$\boxed{x(t)=e^{4t}\left(7t-\frac{1}{7}\right)+c_1e^{-3t}+c_2e^{4t} \qquad \begin{cases} c_1,c_2\in\mathbb{R} \\ t\in\mathbb{R}\end{cases}}$$

y la solución del problema con valores iniciales consiste en despejar $c_1$ y $c_2$, cosa que no voy a hacer.

## Ejercicio 4

Sabemos que las soluciones de dicho sistema se pueden escribir como

$$\vec{x}(t)=\begin{cases} c_1e^{\lambda_1t}\vec{\xi}_1+c_2e^{\lambda_2t}\vec{\xi}_2 & \text{cuando la matriz es diagonalizable} \\ c_1e^{\lambda t}\vec{\xi}_1+c_2e^{\lambda t}\left(\vec{\xi}_1t+\vec{\xi}_2\right) & \text{cuando la matriz no es diagonalizable}\end{cases}$$

Sea cual fuere la situación, necesitamos que $\operatorname{Re}(\lambda_i)<0$ para que se cumpla el límite que nos piden. Los autovalores de $\mathscr{A}$ se obtienen según

$$\begin{aligned} \det(\mathscr{A}-\lambda\mathscr{I}) &= \det\left(\begin{bmatrix} -4 & \alpha \\ -\alpha & 1\end{bmatrix}-\lambda\mathscr{I}\right) \\ &= \det\begin{bmatrix} -4-\lambda & \alpha \\ -\alpha & 1-\lambda\end{bmatrix} \\ &= (4+\lambda)(\lambda-1)+\alpha^2 \\ &= \lambda^2+3\lambda-4+\alpha^2 \end{aligned}$$

cuyas raíces son

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{-3\pm\sqrt{9-4(\alpha^2-4)}}{2} \\ &= \frac{-3\pm\sqrt{9+16-4\alpha^2}}{2} \\ &= \frac{-3\pm\sqrt{25-4\alpha^2}}{2} \end{aligned}$$

Como no se puede seguir simplificando, voy a pedir que

$$\left|\sqrt{25-4\alpha^2}\right|<3$$

lo cual nos asegura que las dos raíces son negativas y por ende los autovalores también. En el caso de que $25-4\alpha^2<0$ entonces automáticamente se satisface lo pedido ya que $\operatorname{Re}(\lambda_i)=-\frac{3}{2}$.

$$\left|\sqrt{25-4\alpha^2}\right|<3 \iff 0<25-4\alpha^2<9 \iff -25<-4\alpha^2<-16 \iff 4<\alpha^2<\frac{25}{4} \iff$$
$$\iff \alpha\in\left(-\frac{5}{2},-2\right)\cup\left(2,\frac{5}{2}\right)$$

Dado que, como se mencionó anteriormente, cuando toda la raíz $\sqrt{}$ se vuelve imaginaria entonces la parte real de los autovalores es negativa, incorporamos estas soluciones ampliando los rangos para $\alpha$

$$\boxed{\alpha\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)}\Rightarrow \lim_{t\to+\infty}\vec{x}(t)=\vec{0}$$

Respecto al diagrama de flujo, dado que ambos autovalores son negativos, se obtiene algo similar al caso de la figura 3 en la página 51.