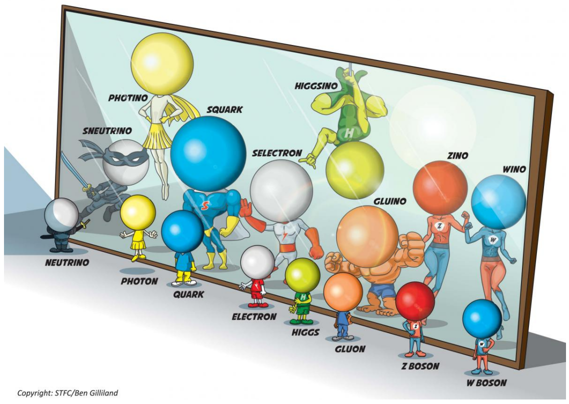
Supersimetría en Teoría Cuántica de Campos

Matías H. Senger
m.senger@hotmail.com

14 de septiembre de 2018

El presente documento fue redactado por un estudiante como parte de la presentación final de la materia Teoría Cuántica de Campos. Presenta una introducción al modelo de Wess-Zumino adaptada del capítulo 11 del libro Quantum Field Theory de L. H. Ryder de 1996. Se trata de un lagrangiano compuesto por un campo campos espinoriales y escalares que es invariante frente a transformaciones de supersimetría. Las transformaciones de supersimetría son transformaciones que mezclan los campos bosónicos y los fermiónicos.

La adaptación aquí presentada hace énfasis en entender el tema de supersimetría. Es por ello que se omitió toda parte de cálculos innecesarios que no aporten (por ejemplo la primera parte del capítulo) y además se desarrollaron en forma más detallada otros cálculos.



Índice

Índice de *boxes*

1. Introducción

La supersimetría, propuesta por primera vez en la física de partículas en 1974 por Wess y Zumino, es un tipo de simetría que relaciona fermiones con bosones. Un lagrangiano puede (o no) ser supersimétrico. Esto quiere decir que dado un lagrangiano con campos bosónicos y fermiónicos y dada una transformación tal que el resultado mezcla estos campos, la acción que se deriva de este lagrangiano puede (o no) ser invariante ante esta transformación. Cuando esto sucede se dice que el lagrangiano (o la teoría) es supersimétrico.

A pesar de la ausencia de pruebas experimentales acerca de si la supersimetría juega algún papel relevante en el universo, se ha desarrollado mucho trabajo teórico en el tema. Entre otros resultados teóricos de la supersimetría se pueden mencionar dos: por un lado la gran unificación de la fuerza electrodébil con la fuerza fuerte se vuelve exacta si se consideran teorías supersimétricas y por otro una supersimetría local brinda un marco que permitiría incluir a la gravedad en una teoría cuántica de campos. En este último caso la gravedad entraría en la teoría como un campo sin masa de espín 2, dando lugar a lo que se conoce como *supergravedad*. Teorías supersimétricas también introducen candidatos para la materia oscura.

En este trabajo se estudiará un modelo muy simple que no hace referencia al concepto de partículas. Se trata del modelo de Wess-Zumino que posee un campo espinorial de Majorana y dos (o cuatro) campos escalares reales. Se definirá una transformación supersimétrica y se estudiarán algunas de sus propiedades.

2. El modelo de Wess-Zumino *on-shell*

El modelo de Wess-Zumino *on-shell* propone el lagrangiano

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu A\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu B\right)^2 + \frac{i}{4}\overline{\Psi}\gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \Psi \rightarrow \text{On-shell Wess-Zumino} \tag{2.1}$$

donde A y B son campos escalares reales (bosones de espín cero sin carga), Ψ es un espinor de Majorana (ver box 1) y $\overleftrightarrow{\partial}_\mu$ se define según $\overleftrightarrow{\partial}_\mu \equiv \overrightarrow{\partial}_\mu - \overleftarrow{\partial}_\mu$. Obsérvese que los campos son sin masa.

Box 1 - Los espinores de Majorana

El espinor Ψ es un *espinor de Majorana* si

$$\Psi = \Psi^C \quad \rightarrow \text{Espinor de Majorana} \tag{2.2}$$

con $\Psi^C \overset{\text{def}}{=} C\overline{\Psi}^T$ donde C es la matriz de conjugación de carga (ver box 2 sobre conjugación de carga).

¿Qué representan los espinores de Majorana? Ψ^C es la antipartícula de Ψ, con lo cual $\Psi = \Psi^C$ implica que Ψ es su propia antipartícula. Los espinores de Majorana (fermiones de Majorana en general) son partículas de espín $\frac{1}{2}$, sin carga, que son su propia antipartícula. El fotino, la partícula supersimétrica del fotón, es un espinor de Majorana.

Box 2 - Conjugación de carga

La conjugación de carga es la operación que convierte a una partícula en su antipartícula. En el espacio de espinores esta operación se representa mediante una matriz C (la del teorema CPT) que satisface [1, eq. (10.11)]

$$\text{Matriz de conjugación de carga} \rightarrow \begin{cases} C{\gamma^\mu}^T C^{-1} = -\gamma^\mu \\ C^T = -C \end{cases} \tag{2.3}$$

Para un espinor Ψ se tiene que

$$\Psi^C \equiv C\overline{\Psi}^T \rightarrow \text{Espinor conjugado por carga} \tag{2.4}$$

es el espinor conjugado por carga donde $\overline{\Psi}^T = \left(\Psi^\dagger\gamma^0\right)^T$ es el espinor conjugado de Dirac transpuesto.

El objetivo va a ser verificar que la acción que se deriva de $\mathscr{L}$ es invariante ante una *transformación supersimétrica* que mezcla los campos escalares y los espinores. $\mathscr{L}$ no será invariante ante esta transformación, sino que variará a menos de una divergencia lo cual implica que las ecuaciones de movimiento permanecerán invariantes.

La transformación de supersimetría opera de modo tal que

$$\text{Transformación supersimétrica} \rightarrow \begin{cases} \delta A = \overline{\varepsilon}\Psi \\ \delta B = i\overline{\varepsilon}\gamma^5\Psi \\ \delta\Psi = \gamma^\mu\left(-i\partial_\mu A + \gamma^5\partial_\mu B\right)\varepsilon \\ \delta\overline{\Psi} = \overline{\varepsilon}\left(i\partial_\mu A - \gamma^5\partial_\mu B\right)\gamma^\mu \end{cases} \tag{2.5}$$

donde ε es un espinor de Majorana infinitesimal que actúa de parámetro. Obsérvese que esta transformación es tal que se mezclan los campos escalares con el espinor y viceversa.

2.1. Invariancia de la acción

Para calcular $\delta\mathscr{L}$ frente a esta transformación de supersimetría (dada por la eq. (2.5)) se procederá del siguiente modo

$$\begin{aligned} \delta\mathscr{L} &= \delta\left[\frac{1}{2}\left(\partial_\mu A\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu B\right)^2 + \frac{i}{4}\overline{\Psi}\gamma^\mu\overleftrightarrow{\partial}_\mu\Psi\right] \\ &= \delta\left[\frac{1}{2}\left(\partial_\mu A\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu B\right)^2\right] + \delta\left[\frac{i}{4}\overline{\Psi}\gamma^\mu\overleftrightarrow{\partial}_\mu\Psi\right] \\ &= \delta\mathscr{L}_{AB} + \delta\mathscr{L}_\Psi \leftarrow \text{Esto es sólo por comodidad} \end{aligned}$$

y se verá que cada uno de estos dos términos es igual a sí mismo (i.e. se cancelan) más una divergencia, con lo cual la acción permanecerá invariante.

En primer lugar

$$\begin{aligned} \delta\mathscr{L}_{AB} &\equiv \delta\left[\frac{1}{2}\left(\partial_\mu A\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu B\right)^2\right] \\ &= \frac{\delta\left(\partial_\mu A\right)\left(\partial^\mu A\right) + \left(\partial_\mu A\right)\delta\left(\partial^\mu A\right)}{2} + \frac{\delta\left(\partial_\mu B\right)\left(\partial^\mu B\right) + \left(\partial_\mu B\right)\delta\left(\partial^\mu B\right)}{2} \\ x^\mu y_\mu = x_\mu y^\mu \rightarrow \quad &= \left(\partial_\mu A\right)\delta\left(\partial^\mu A\right) + \left(\partial_\mu B\right)\delta\left(\partial^\mu B\right) \\ \delta\left(\partial_\mu A\right) = \partial_\mu\left(\delta A\right) \rightarrow \quad &= \left(\partial_\mu A\right)\partial^\mu\left(\delta A\right) + \left(\partial_\mu B\right)\partial^\mu\left(\delta B\right) \\ \left.\begin{array}{r} \delta A \equiv \overline{\varepsilon}\Psi \\ \delta B \equiv i\overline{\varepsilon}\gamma^5\Psi \end{array}\right\} \rightarrow \quad &= \left(\partial_\mu A\right)\overline{\varepsilon}\partial^\mu\Psi + \left(\partial_\mu B\right)i\overline{\varepsilon}\gamma^5\partial^\mu\Psi \\ &= \overline{\varepsilon}\left[\partial_\mu A + i\gamma^5\partial_\mu B\right]\partial^\mu\Psi \end{aligned} \tag{2.6}$$

donde se ha usado que $\delta\left(\partial_\mu A\right) = \partial_\mu\left(\delta A\right)$ (y lo mismo para B) lo cual es válido ya que la transformación de supersimetría no depende de las coordenadas x^μ (ver box 3).

Box 3 - Cuándo conmutan δ y ∂_μ

Sea $A(x)$ un campo y sea $f(A, x, \xi)$ una transformación con $\xi \in \mathbb{R}$ un parámetro, y tal que $f(A, x, 0) = A(x)$. En el caso de una transformación infinitesimal, i.e. con $\xi \rightarrow 0$, se tiene que el campo transforma según

$$\begin{aligned} A' &= f(A, x, \xi) \\ \text{Infinitesimal} \rightarrow \quad &\approx f(A, x, 0) + \xi\left[\frac{\partial f}{\partial\xi}\right]_{\xi=0} \\ &= A + \delta A \end{aligned}$$

mientras que su gradiente es

$$\begin{aligned}
\partial_\mu\left(A'\right) &\approx \frac{\partial}{\partial x^\mu}\overbrace{\left(A+\xi\left[\frac{\partial f}{\partial \xi}\right|_{\xi=0}\right)}^{\text{Taylor de } f(A,x,\xi)} \\
&= \partial_\mu A+\partial_\mu\left(\xi\left[\frac{\partial f}{\partial \xi}\right|_{\xi=0}\right) \\
\left[\frac{\partial f}{\partial \xi}\right|_{\xi=0} \stackrel{\text{def}}{=} g\left(A,x\right)\rightarrow \quad &= \partial_\mu A+\xi\left(\frac{\partial g}{\partial A}\frac{\partial A}{\partial x^\mu}+\frac{\partial g}{\partial x^\mu}\right) \\
&= \partial_\mu A+\xi\left(\frac{\partial g}{\partial A}\partial_\mu A+\partial_\mu g\right) \\
&= \partial_\mu A+\delta\left(\partial_\mu A\right)
\end{aligned}$$

Entonces se encontró que

$$\begin{cases} \delta A=\xi g \\ \delta\left(\partial_\mu A\right)=\xi\left(\dfrac{\partial g}{\partial A}\partial_\mu A+\partial_\mu g\right) \end{cases} \tag{2.7}$$

Aplicando ∂_μ a la primera ecuación se obtiene

$$\partial_\mu\left(\delta A\right)=\xi\frac{\partial g}{\partial A}\partial_\mu A \tag{2.8}$$

con lo cual, reemplazando en la segunda,

$$\delta\left(\partial_\mu A\right)=\partial_\mu\left(\delta A\right)+\xi\partial_\mu g \tag{2.9}$$

Se observa que si $\partial_\mu g\equiv 0$ entonces $\delta\left(\partial_\mu A\right)=\partial_\mu\left(\delta A\right)$. Recordando que $g\left(A,x\right)\stackrel{\text{def}}{=}\left[\frac{\partial f}{\partial \xi}\right|_{\xi=0}$ entonces si $\frac{\partial f}{\partial x^\mu}=0$, i. e. si la transformación no depende de las coordenadas, entonces vale que

$$\delta\left(\partial_\mu A\right)=\partial_\mu\left(\delta A\right) \tag{2.10}$$

En segundo lugar

$$\begin{aligned}
\delta\mathscr{L}_\Psi &\equiv \delta\left[\frac{i}{4}\overline{\Psi}\gamma^\mu\overleftrightarrow{\partial}_\mu\Psi\right] \\
\overleftrightarrow{\partial}_\mu\equiv\overrightarrow{\partial}_\mu-\overleftarrow{\partial}_\mu\rightarrow \quad &= \frac{i}{4}\delta\left[\overline{\Psi}\gamma^\mu\left(\partial_\mu\Psi\right)-\left(\partial_\mu\overline{\Psi}\right)\gamma^\mu\Psi\right] \\
&= \frac{i}{4}\left[\delta\overline{\Psi}\gamma^\mu\left(\partial_\mu\Psi\right)+\overline{\Psi}\gamma^\mu\delta\left(\partial_\mu\Psi\right)-\delta\left(\partial_\mu\overline{\Psi}\right)\gamma^\mu\Psi-\left(\partial_\mu\overline{\Psi}\right)\gamma^\mu\delta\Psi\right] \\
\delta\left(\partial_\mu\Psi\right)=\partial_\mu\left(\delta\Psi\right)\rightarrow \quad &= \frac{i}{4}\left[\delta\overline{\Psi}\gamma^\mu\left(\partial_\mu\Psi\right)+\overline{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\left(\delta\Psi\right)-\partial_\mu\left(\delta\overline{\Psi}\right)\gamma^\mu\Psi-\left(\partial_\mu\overline{\Psi}\right)\gamma^\mu\delta\Psi\right] \\
\text{Reordeno y sumo y resto}\rightarrow \quad &= \frac{i}{4}\left[2\delta\overline{\Psi}\gamma^\mu\left(\partial_\mu\Psi\right)-2\left(\partial_\mu\overline{\Psi}\right)\gamma^\mu\delta\Psi+\dots\right. \\
&\qquad\left.\dots+\overline{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\left(\delta\Psi\right)+\left(\partial_\mu\overline{\Psi}\right)\gamma^\mu\delta\Psi-\partial_\mu\left(\delta\overline{\Psi}\right)\gamma^\mu\Psi-\delta\overline{\Psi}\gamma^\mu\left(\partial_\mu\Psi\right)\right] \\
&= \frac{i}{4}\left[2\delta\overline{\Psi}\gamma^\mu\left(\partial_\mu\Psi\right)-2\left(\partial_\mu\overline{\Psi}\right)\gamma^\mu\delta\Psi+\partial_\mu\left(\overline{\Psi}\gamma^\mu\delta\Psi-\delta\overline{\Psi}\gamma^\mu\Psi\right)\right] \\
&= \frac{i}{2}\left[\delta\overline{\Psi}\gamma^\mu\left(\partial_\mu\Psi\right)-\left(\partial_\mu\overline{\Psi}\right)\gamma^\mu\delta\Psi\right]+\partial_\mu\Xi^\mu
\end{aligned} \tag{2.11}$$

donde $\Xi^\mu\equiv\frac{i}{4}\left(\overline{\Psi}\gamma^\mu\delta\Psi-\delta\overline{\Psi}\gamma^\mu\Psi\right)$ aunque dicha expresión es irrelevante ya que $\partial_\mu\Xi^\mu$ es una divergencia (no altera la acción). Como Ψ y $\overline{\Psi}$ son espinores de Majorana (por definición del modelo de Wess-Zumino) entonces $\partial_\mu\Psi$ y $\partial_\mu\overline{\Psi}$ también lo son con lo cual se puede usar la identidad $\bar{\xi}\gamma^\mu\zeta=-\bar{\zeta}\gamma^\mu\xi$ (ver box 4) por lo tanto

$$\delta\mathscr{L}_\Psi=i\delta\overline{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi+\partial_\mu\Xi^\mu \tag{2.12}$$

Box 4 - Identidad útil de los espinores de Majorana

Dados ξ y ζ dos espinores de Majorana (ver box 1), entonces vale la siguiente identidad:

$$\bar{\xi}\gamma^{\mu}\zeta = -\bar{\zeta}\gamma^{\mu}\xi \quad \rightarrow \text{Identidad para espinores de Majorana} \tag{2.13}$$

Para demostrarla se procede de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\bar{\xi}\gamma^{\mu}\zeta &= \bar{\xi}\gamma^{\mu}\zeta^{C} \\
\zeta^{C} \overset{\text{def}}{=} C\bar{\zeta}^{T} \rightarrow \quad &= \bar{\xi}\gamma^{\mu}C\bar{\zeta}^{T} \\
\overline{\psi} \overset{\text{def}}{=} \psi^{\dagger}\gamma^{0} \rightarrow \quad &= \xi^{\dagger}\gamma^{0}\gamma^{\mu}C\left(\gamma^{0}\right)^{T}\zeta^{*} \\
\text{Notación de índices} \rightarrow \quad &= \xi_{i}^{*}\left(\gamma^{0}\gamma^{\mu}C\left(\gamma^{0}\right)^{T}\right)_{ij}\zeta_{j}^{*} \\
&= \xi_{i}^{*}\zeta_{j}^{*}\left(\gamma^{0}\gamma^{\mu}C\left(\gamma^{0}\right)^{T}\right)_{ij}
\end{aligned}$$

Ahora, como ξ_i y ζ_j satisfacen el álgebra de Grassmann[a] [1, p. 441] entonces

$$\begin{aligned}
\bar{\xi}\gamma^{\mu}\zeta &= -\zeta_{j}^{*}\xi_{i}^{*}\left(\gamma^{0}\gamma^{\mu}C\left(\gamma^{0}\right)^{T}\right)_{ij} \\
\text{Notación matricial} \rightarrow \quad &= -\zeta^{\dagger}\left(\gamma^{0}\gamma^{\mu}C\left(\gamma^{0}\right)^{T}\right)^{T}\xi^{*} \\
\left(\gamma^{0}\gamma^{\mu}C\left(\gamma^{0}\right)^{T}\right)^{T} = \gamma^{0}\gamma^{\mu}C\left(\gamma^{0}\right)^{T} \rightarrow \quad &= -\underbrace{\zeta^{\dagger}\gamma^{0}}_{\bar{\zeta}}\gamma^{\mu}C\underbrace{\left(\gamma^{0}\right)^{T}\xi^{*}}_{\left(\xi^{*T}\gamma^{0}\right)^{T}} \\
&= -\bar{\zeta}\gamma^{\mu}\underbrace{C\bar{\xi}^{T}}_{\xi^{C}} \\
&= -\bar{\zeta}\gamma^{\mu}\xi^{C}
\end{aligned}$$

Para concluir se utiliza el facto de que ξ es un espinor de Majorana (hipótesis) con lo cual $\xi^{C} \equiv \xi$ y entonces se obtiene finalmente

$$\bar{\xi}\gamma^{\mu}\zeta = -\bar{\zeta}\gamma^{\mu}\xi \checkmark \tag{2.14}$$

[a] Ver box 5 sobre el álgebra de Grassmann.

Box 5 - El álgebra de Grassmann

Dos cantidades ξ y ζ se dice que satisfacen el álgebra de Grassmann (o Graßmann) si

$$\{\xi, \zeta\} = 0 \tag{2.15}$$

Obsérvese que esta es la relación de anticonmutación que se impone a algunas componentes de los campos de Dirac. Puntualmente para el campo de Dirac ψ con componentes ψ_{α} la cuantización canónica impone que $\left\{\psi_{\alpha}(\boldsymbol{x}, t), \psi_{\beta}^{\dagger}(\boldsymbol{y}, t)\right\} = \delta_{\alpha\beta}\delta_{D}^{3}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$. Las componentes con $\alpha \neq \beta$ satisfarán el álgebra de Grassmann.

A continuación se reemplaza $\delta\overline{\Psi} = \bar{\varepsilon}\left(i\partial_{\mu}A - \gamma^{5}\partial_{\mu}B\right)\gamma^{\mu}$ de acuerdo con la transformación de supersimetría dada en la eq. (2.5) para obtener

$$\begin{aligned}
\delta\mathscr{L}_{\Psi} &= i\bar{\varepsilon}\left(i\partial_{\nu}A - \gamma^{5}\partial_{\nu}B\right)\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\Psi + \partial_{\mu}\Xi^{\mu} \\
&= -\bar{\varepsilon}\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\left[\left(\partial_{\nu}A\right)\left(\partial_{\mu}\Psi\right) + i\gamma^{5}\left(\partial_{\nu}B\right)\left(\partial_{\mu}\Psi\right)\right] + \partial_{\mu}\Xi^{\mu}
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Se puede mostrar que $\begin{cases} \gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\left(\partial_{\nu}A\right)\left(\partial_{\mu}\Psi\right) = \left(\partial_{\mu}A\right)\left(\partial^{\mu}\Psi\right) + \partial_{\mu}\Theta^{\mu} \\ \gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\left(\partial_{\nu}B\right)\left(\partial_{\mu}\Psi\right) = \left(\partial_{\mu}B\right)\left(\partial^{\mu}\Psi\right) + \partial_{\mu}\Sigma^{\mu} \end{cases}$ (ver box 6) donde Θ y Σ tienen expresiones que no son relevantes, por lo tanto

$$\begin{aligned}
\delta\mathscr{L}_{\Psi} &= -\bar{\varepsilon}\left[\partial_{\mu}A + i\gamma^{5}\partial_{\mu}B\right]\partial^{\mu}\Psi + \partial_{\mu}\left(\Xi^{\mu} - \bar{\varepsilon}\Theta^{\mu} - i\bar{\varepsilon}\gamma^{5}\Sigma^{\mu}\right) \\
&= -\bar{\varepsilon}\left[\partial_{\mu}A + i\gamma^{5}\partial_{\mu}B\right]\partial^{\mu}\Psi + \partial_{\mu}\Upsilon^{\mu}
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Box 6 - Demostración de las identidades que se usaron

Para demostrar que $\gamma^\nu\gamma^\mu(\partial_\nu A)(\partial_\mu\Psi) = (\partial_\mu A)(\partial^\mu\Psi) + \partial_\mu\Theta^\mu$ considérese lo siguiente:

$$\begin{aligned}\partial_\mu\partial_\nu(A\Psi) &= A(\partial_\mu\partial_\nu\Psi) + (\partial_\mu\partial_\nu A)\Psi + (\partial_\mu A)(\partial_\nu\Psi) + (\partial_\nu A)(\partial_\mu\Psi)\\ &= \partial_\mu(A\partial_\nu\Psi) + (\partial_\mu\partial_\nu A)\Psi + (\partial_\nu A)(\partial_\mu\Psi)\end{aligned}$$

con lo cual, despejando, se obtiene

$$\begin{aligned}(\partial_\nu A)(\partial_\mu\Psi) &= \partial_\mu\partial_\nu(A\Psi) - \partial_\mu(A\partial_\nu\Psi) - (\partial_\mu\partial_\nu A)\Psi\\ &= -(\partial_\mu\partial_\nu A)\Psi + \partial_\mu(\partial_\nu(A\Psi) - A\partial_\nu\Psi)\end{aligned}$$

Multiplíquese ahora por $\gamma^\nu\gamma^\mu$ a ambos lados de la igualdad. Se obtiene

$$\gamma^\nu\gamma^\mu(\partial_\nu A)(\partial_\mu\Psi) = -\gamma^\nu\gamma^\mu(\partial_\mu\partial_\nu A)\Psi + \partial_\mu\Gamma^\mu \tag{2.18}$$

con $\Gamma^\mu = \gamma^\nu\gamma^\mu(\partial_\nu(A\Psi) - A\partial_\nu\Psi)$. Úsese que $\partial_\mu\partial_\nu A$ es simétrico por lo tanto[a]

$$\begin{aligned}\gamma^\nu\gamma^\mu(\partial_\nu A)(\partial_\mu\Psi) &= -(\partial^\mu\partial_\mu A)\Psi + \partial_\mu\Gamma^\mu\\ \partial^\mu[(\partial_\mu A)\Psi] = (\partial^\mu\partial_\mu A)\Psi + (\partial_\mu A)(\partial^\mu\Psi) \rightarrow \quad &= (\partial_\mu A)(\partial^\mu\Psi) + \partial_\mu(\Gamma^\mu - (\partial^\mu A)\Psi)\end{aligned}$$

y entonces, finalmente, se obtiene lo que se quería probar

$$\gamma^\nu\gamma^\mu(\partial_\nu A)(\partial_\mu\Psi) = (\partial_\mu A)(\partial^\mu\Psi) + \partial_\mu\Theta^\mu \tag{2.19}$$

con $\Theta^\mu = \gamma^\nu\gamma^\mu(\partial_\nu(A\Psi) - A\partial_\nu\Psi) - (\partial^\mu A)\Psi$.

[a] Ver box 7.

Box 7 - Identidad útil para la contracción de gammas y tensores simétricos

Dado $T_{\mu\nu}$ un tensor simétrico, i.e. $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$, entonces

$$\begin{aligned}\gamma^\mu\gamma^\nu T_{\mu\nu} &= (2\eta^{\mu\nu} - \gamma^\nu\gamma^\mu)T_{\mu\nu}\\ &= 2T^\mu{}_\mu - \gamma^\nu\gamma^\mu T_{\mu\nu}\\ T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu} \rightarrow \quad &= 2T^\mu{}_\mu - \gamma^\nu\gamma^\mu T_{\nu\mu}\end{aligned}$$

Usando que $\gamma^\mu\gamma^\nu T_{\mu\nu} \equiv \gamma^\nu\gamma^\mu T_{\nu\mu}$ por el hecho de que μ y ν son índices mudos se tiene que

$$\gamma^\mu\gamma^\nu T_{\mu\nu} = 2T^\mu{}_\mu - \gamma^\mu\gamma^\nu T_{\mu\nu} \tag{2.20}$$

o bien, despejando,

$$\gamma^\mu\gamma^\nu T_{\mu\nu} = T^\mu{}_\mu \quad \text{para } T \text{ simétrico} \tag{2.21}$$

Finalmente, juntando (2.6) y (2.17) se obtiene

$$\begin{aligned}\delta\mathscr{L} &= \overbrace{\bar\varepsilon\left[\partial_\mu A + i\gamma^5\partial_\mu B\right]\partial^\mu\Psi}^{\delta\mathscr{L}_{AB}} - \overbrace{\bar\varepsilon\left[\partial^\mu A + i\gamma^5\partial^\mu B\right]\partial_\mu\Psi + \partial_\mu\Upsilon^\mu}^{\delta\mathscr{L}_\Psi}\\ &= \partial_\mu\Upsilon^\mu\end{aligned}$$

y como $\delta\mathscr{L} = \partial_\mu\Upsilon^\mu$ es una divergencia entones la acción $S = \int\mathscr{L}\,d^4x$ permanecerá invariante como así también las ecuaciones de movimiento. Esto implica que (2.5) es una transformación de simetría para el lagrangiano (2.1).

Box 8 - Transformación 'supersimétrica' en el electromagnetismo clásico

Considérense los campos $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ y considérese un boost parametrizado según $\boldsymbol{\beta}$. En este caso se tiene que los campos transforman según

$$\text{Boost campo electormagnético} \rightarrow \begin{cases}\boldsymbol{E}' = \gamma(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{B}) - \dfrac{\gamma^2}{\gamma+1}\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{E})\\[2ex] \boldsymbol{B}' = \gamma(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{E}) - \dfrac{\gamma^2}{\gamma+1}\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{B})\end{cases} \tag{2.22}$$

y como mantiene invariantes a las ecuaciones de movimiento, debería ser una simetría del lagrangiano. Entonces un boost es, para el electromagnetismo, similar a la transformación supersimétrica (2.5) en el sentido de que mezcla los campos $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$.

Warning

Podría ser que lo anterior en realidad nada que ver con la supersimetría, ni siquiera como una analogía simpática. Es algo que se me ocurrió... Pero intenté aplicarlo al lagrangiano del campo electromagnético y creo que no funciona.

2.2. El problema del modelo *on-shell*

Las transformaciones de supersimetría deben formar un grupo, al igual que las transformaciones de Poincaré (o cualquier otra transformación). Sin embargo esto no ocurre para las transformaciones definidas por (2.5). Para ver por qué no forman un grupo consideremos dos transformaciones supersimétricas SUSY 1 y SUSY 2 dadas respectivamente por

$$\text{SUSY 1} \rightarrow \begin{cases} \delta_1 A = \overline{\varepsilon_1}\Psi \\ \delta_1 B = i\overline{\varepsilon_1}\gamma^5\Psi \\ \delta_1 \Psi = \gamma^\mu\left(-i\partial_\mu A + \gamma^5\partial_\mu B\right)\varepsilon_1 \\ \delta_1\overline{\Psi} = \overline{\varepsilon_1}\left(i\partial_\mu A - \gamma^5\partial_\mu B\right)\gamma^\mu \end{cases} \qquad \text{SUSY 2} \rightarrow \begin{cases} \delta_2 A = \overline{\varepsilon_2}\Psi \\ \delta_2 B = i\overline{\varepsilon_2}\gamma^5\Psi \\ \delta_2 \Psi = \gamma^\mu\left(-i\partial_\mu A + \gamma^5\partial_\mu B\right)\varepsilon_2 \\ \delta_2\overline{\Psi} = \overline{\varepsilon_2}\left(i\partial_\mu A - \gamma^5\partial_\mu B\right)\gamma^\mu \end{cases} \tag{2.23}$$

y denotemos la acción de la aplicación sucesiva de estas transformaciones según

$$A \quad \xrightarrow{\delta_1} \quad A_1 = A + \delta_1 A \quad \xrightarrow{\delta_2} \quad A_{12} = A_1 + \delta_2 A_1 = A + (\delta_1 + \delta_2)\, A + \delta_2\,(\delta_1 A) \tag{2.24}$$

y lo mismo para los demás campos. La aplicación de las transformaciones en orden invertido es

$$A \quad \xrightarrow{\delta_2} \quad A_2 = A + \delta_2 A \quad \xrightarrow{\delta_1} \quad A_{21} = A_2 + \delta_1 A_2 = A + (\delta_1 + \delta_2)\, A + \delta_1\,(\delta_2 A) \tag{2.25}$$

Lo que queremos ver es que

$$\text{Queremos esto} \rightarrow \begin{cases} [\delta_1, \delta_2]\, A = \Delta A \\ [\delta_1, \delta_2]\, B = \Delta B \\ [\delta_1, \delta_2]\, \Psi = \Delta \Psi \\ [\delta_1, \delta_2]\, \overline{\Psi} = \Delta \overline{\Psi} \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad [\delta_1, \delta_2] = \Delta \tag{2.26}$$

donde $[\delta_1, \delta_2]\, A \equiv \delta_1\,(\delta_2 A) - \delta_2\,(\delta_1 A)$ y Δ es "algo" igual en todas las expresiones. Sin embargo, como ya se ha adelantado, las transformaciones (2.5) no lo satisfacen. De hecho lo satisfacen sólo cuando se cumple la ecuación de movimiento clásica (de ahí el nombre *on-shell*). Para hacerlo evidente procedamos con el cálculo:

$$\begin{aligned} \delta_1\delta_2 A &= \delta_1\left(\overline{\varepsilon_2}\Psi\right) \leftarrow \delta A = \overline{\varepsilon}\Psi \\ &= \overline{\varepsilon_2}\delta_1\Psi \\ \delta\Psi = \gamma^\mu\left(-i\partial_\mu A + \gamma^5\partial_\mu B\right)\varepsilon \rightarrow \quad &= \overline{\varepsilon_2}\gamma^\mu\left[-i\partial_\mu A + \gamma^5\partial_\mu B\right]\varepsilon_1 \end{aligned}$$

con lo cual

$$\begin{aligned} [\delta_1, \delta_2]\, A &= \overbrace{\overline{\varepsilon_2}\gamma^\mu\left[-i\partial_\mu A + \gamma^5\partial_\mu B\right]\varepsilon_1}^{\delta_1\delta_2 A} - \overbrace{\overline{\varepsilon_1}\gamma^\mu\left[-i\partial_\mu A + \gamma^5\partial_\mu B\right]\varepsilon_2}^{\delta_2\delta_1 A} \\ &= -i\left(\overline{\varepsilon_2}\gamma^\mu\varepsilon_1 - \overline{\varepsilon_1}\gamma^\mu\varepsilon_2\right)\partial_\mu A + \left(\overline{\varepsilon_2}\gamma^\mu\gamma^5\varepsilon_1 - \overline{\varepsilon_1}\gamma^\mu\gamma^5\varepsilon_2\right)\partial_\mu B \\ \left.\begin{matrix} \bar{\xi}\gamma^\mu\eta = -\bar{\eta}\gamma^\mu\xi \\ \bar{\xi}\gamma^\mu\gamma^5\eta = \bar{\eta}\gamma^\mu\gamma^5\xi \end{matrix}\right\} \text{por ser majoranas} \rightarrow \quad &= 2i\overline{\varepsilon_1}\gamma^\mu\varepsilon_2\partial_\mu A \end{aligned}$$

Haciendo una cuenta prácticamente idéntica se encuentra que

$$[\delta_1, \delta_2]\, B = 2i\overline{\varepsilon_1}\gamma^\mu\varepsilon_2\partial_\mu B \tag{2.27}$$

Para el campo espinorial se tiene que

$$
\begin{aligned}
\delta_1\delta_2\Psi &= \delta_1 \overbrace{\left(\gamma^\mu\left[-i\partial_\mu A+\gamma^5\partial_\mu B\right]\varepsilon_2\right)}^{\delta_2\Psi} \\
&= \gamma^\mu\left(-i\partial_\mu\delta_1 A+\gamma^5\partial_\mu\delta_1 B\right)\varepsilon_2 \\
\left.\begin{matrix}\delta A=\overline{\varepsilon}\Psi \\ \delta B=i\overline{\varepsilon}\gamma^5\Psi\end{matrix}\right\}\rightarrow \quad &= \gamma^\mu\left(-i\partial_\mu\left(\overline{\varepsilon_1}\Psi\right)+\gamma^5\partial_\mu i\left(\overline{\varepsilon_1}\gamma^5\Psi\right)\right)\varepsilon_2 \\
&= -i\gamma^\mu\varepsilon_2\overline{\varepsilon_1}\partial_\mu\Psi+i\gamma^\mu\gamma^5\varepsilon_2\overline{\varepsilon_1}\gamma^5\partial_\mu\Psi
\end{aligned} \tag{2.28}
$$

con lo cual

$$
\begin{aligned}
\left[\delta_1,\delta_2\right]\Psi &= -i\gamma^\mu\varepsilon_2\overline{\varepsilon_1}\partial_\mu\Psi+i\gamma^\mu\gamma^5\varepsilon_2\overline{\varepsilon_1}\gamma^5\partial_\mu\Psi+i\gamma^\mu\varepsilon_1\overline{\varepsilon_2}\partial_\mu\Psi-i\gamma^\mu\gamma^5\varepsilon_1\overline{\varepsilon_2}\gamma^5\partial_\mu\Psi \\
&= -i\gamma^\mu\left[\varepsilon_2\overline{\varepsilon_1}-\gamma^5\varepsilon_2\overline{\varepsilon_1}\gamma^5-\varepsilon_1\overline{\varepsilon_2}+\gamma^5\varepsilon_1\overline{\varepsilon_2}\gamma^5\right]\partial_\mu\Psi \\
&= -i\gamma^\mu\left[\varepsilon_2\overline{\varepsilon_1}-\varepsilon_1\overline{\varepsilon_2}-\gamma^5\left(\varepsilon_2\overline{\varepsilon_1}-\varepsilon_1\overline{\varepsilon_2}\right)\gamma^5\right]\partial_\mu\Psi
\end{aligned}
$$

A continuación se utiliza la identidad de Fierz (ver box 9) con lo cual

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_2\overline{\varepsilon_1}-\varepsilon_1\overline{\varepsilon_2} &= -\frac{1}{4}\left(\overline{\varepsilon_1}\varepsilon_2+\overline{\varepsilon_1}\gamma^\mu\varepsilon_2\gamma_\mu-\overline{\varepsilon_1}\gamma^\mu\gamma^5\varepsilon_2\gamma_\mu\gamma^5+2\overline{\varepsilon_1}\Sigma^{\mu\nu}\varepsilon_2\Sigma_{\mu\nu}+\overline{\varepsilon_1}\gamma^5\varepsilon_2\gamma^5\right)+\dots \\
&\quad \dots+\frac{1}{4}\left(\overline{\varepsilon_2}\varepsilon_1+\overline{\varepsilon_2}\gamma^\mu\varepsilon_1\gamma_\mu-\overline{\varepsilon_2}\gamma^\mu\gamma^5\varepsilon_1\gamma_\mu\gamma^5+2\overline{\varepsilon_2}\Sigma^{\mu\nu}\varepsilon_1\Sigma_{\mu\nu}+\overline{\varepsilon_2}\gamma^5\varepsilon_1\gamma^5\right) \\
&= \frac{\overline{\varepsilon_2}\varepsilon_1-\overline{\varepsilon_1}\varepsilon_2}{4}+\frac{\overline{\varepsilon_2}\gamma^\mu\varepsilon_1-\overline{\varepsilon_1}\gamma^\mu\varepsilon_2}{4}\gamma_\mu+\frac{-\overline{\varepsilon_2}\gamma^\mu\gamma^5\varepsilon_1+\overline{\varepsilon_1}\gamma^\mu\gamma^5\varepsilon_2}{4}\gamma_\mu\gamma^5+\dots \\
&\quad \dots+\frac{\overline{\varepsilon_2}\Sigma^{\mu\nu}\varepsilon_1-\overline{\varepsilon_1}\Sigma^{\mu\nu}\varepsilon_2}{2}\Sigma_{\mu\nu}+\frac{\overline{\varepsilon_2}\gamma^5\varepsilon_1-\overline{\varepsilon_1}\gamma^5\varepsilon_2}{4}\gamma^5 \\
\left.\begin{matrix}\overline{\varepsilon_2}\varepsilon_1=\overline{\varepsilon_1}\varepsilon_2 \\ \overline{\varepsilon_2}\gamma^\mu\varepsilon_1=-\overline{\varepsilon_1}\gamma^\mu\varepsilon_2 \\ \overline{\varepsilon_2}\gamma^\mu\gamma^5\varepsilon_1=\overline{\varepsilon_1}\gamma^\mu\gamma^5\varepsilon_2 \\ \overline{\varepsilon_2}\Sigma^{\mu\nu}\varepsilon_1=-\overline{\varepsilon_1}\Sigma^{\mu\nu}\varepsilon_2 \\ \overline{\varepsilon_2}\gamma^5\varepsilon_1=\overline{\varepsilon_1}\gamma^5\varepsilon_2\end{matrix}\right\}\rightarrow \quad &= \frac{1}{2}\overline{\varepsilon_2}\gamma^\mu\varepsilon_1\gamma_\mu+\overline{\varepsilon_2}\Sigma^{\mu\nu}\varepsilon_1\Sigma_{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{2.29}
$$

donde $\Sigma^{\mu\nu}=\frac{i}{4}\left[\gamma^\mu,\gamma^\nu\right]$ y en el último paso se han utilizado las identidades para espinores de Majorana presentadas en el box 10. Similarmente

$$
\begin{aligned}
\gamma^5\left(\varepsilon_2\overline{\varepsilon_1}-\varepsilon_1\overline{\varepsilon_2}\right)\gamma^5 &= \gamma^5\left(\frac{1}{2}\overline{\varepsilon_2}\gamma^\mu\varepsilon_1\gamma_\mu+\overline{\varepsilon_2}\Sigma^{\mu\nu}\varepsilon_1\Sigma_{\mu\nu}\right)\gamma^5 \\
&= \frac{1}{2}\left(\overline{\varepsilon_2}\gamma^\mu\varepsilon_1\right)\left(\gamma^5\gamma_\mu\gamma^5\right)+\left(\overline{\varepsilon_2}\Sigma^{\mu\nu}\varepsilon_1\right)\left(\gamma^5\Sigma_{\mu\nu}\gamma^5\right) \\
\left.\begin{matrix}\left\{\gamma^5,\gamma^\mu\right\}=0 \\ \left(\gamma^5\right)^2=\mathbb{1}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\gamma^5\gamma_\mu\gamma^5=-\gamma_\mu\rightarrow \quad &= -\frac{1}{2}\overline{\varepsilon_2}\gamma^\mu\varepsilon_1\gamma_\mu+\left(\overline{\varepsilon_2}\Sigma^{\mu\nu}\varepsilon_1\right)\left(\gamma^5\Sigma_{\mu\nu}\gamma^5\right) \\
\Sigma^{\mu\nu}=\frac{i}{4}\left[\gamma^\mu,\gamma^\nu\right]\rightarrow \quad &= -\frac{1}{2}\overline{\varepsilon_2}\gamma^\mu\varepsilon_1\gamma_\mu+\frac{i}{4}\left(\overline{\varepsilon_2}\Sigma^{\mu\nu}\varepsilon_1\right)\left(\gamma^5\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma^5-\gamma^5\gamma_\nu\gamma_\mu\gamma^5\right) \\
\left.\begin{matrix}\left\{\gamma^5,\gamma_\mu\right\}=0 \\ \left(\gamma^5\right)^2=\mathbb{1}\end{matrix}\right\}\rightarrow \quad &= -\frac{1}{2}\overline{\varepsilon_2}\gamma^\mu\varepsilon_1\gamma_\mu+\frac{i}{4}\left(\overline{\varepsilon_2}\Sigma^{\mu\nu}\varepsilon_1\right)\left(\gamma_\mu\gamma_\nu-\gamma_\nu\gamma_\mu\right) \\
\Sigma^{\mu\nu}=\frac{i}{4}\left[\gamma^\mu,\gamma^\nu\right]\rightarrow \quad &= -\frac{1}{2}\overline{\varepsilon_2}\gamma^\mu\varepsilon_1\gamma_\mu+\overline{\varepsilon_2}\Sigma^{\mu\nu}\varepsilon_1\Sigma_{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{2.30}
$$

Juntando estos dos resultados se tiene que

$$
\begin{aligned}
\left[\delta_1,\delta_2\right]\Psi &= -i\gamma^\mu\left[\varepsilon_2\overline{\varepsilon_1}-\varepsilon_1\overline{\varepsilon_2}-\gamma^5\left(\varepsilon_2\overline{\varepsilon_1}-\varepsilon_1\overline{\varepsilon_2}\right)\gamma^5\right]\partial_\mu\Psi \leftarrow \text{Esto teníamos de antes} \\
&= -i\gamma^\mu\left[\frac{1}{2}\overline{\varepsilon_2}\gamma^\rho\varepsilon_1\gamma_\rho+\cancel{\overline{\varepsilon_2}\Sigma^{\mu\nu}\varepsilon_1\Sigma_{\mu\nu}}+\frac{1}{2}\overline{\varepsilon_2}\gamma^\rho\varepsilon_1\gamma_\rho-\cancel{\overline{\varepsilon_2}\Sigma^{\mu\nu}\varepsilon_1\Sigma_{\mu\nu}}\right]\partial_\mu\Psi \\
&= -i\gamma^\mu\overline{\varepsilon_2}\gamma^\rho\varepsilon_1\gamma_\rho\partial_\mu\Psi
\end{aligned} \tag{2.31}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(\overline{\varepsilon_2}\gamma^\rho\varepsilon_1\right)\text{ es un número}\rightarrow \quad &= -i\overline{\varepsilon_2}\gamma^\rho\varepsilon_1\gamma^\mu\gamma_\rho\partial_\mu\Psi \\
x^\mu y_\mu=x_\mu y^\mu\rightarrow \quad &= -i\overline{\varepsilon_2}\gamma_\rho\varepsilon_1\gamma^\mu\gamma^\rho\partial_\mu\Psi \\
\left\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\right\}=2\eta^{\mu\nu}\rightarrow \quad &= -2i\overline{\varepsilon_2}\gamma_\rho\varepsilon_1\eta^{\mu\rho}\partial_\mu\Psi+i\overline{\varepsilon_2}\gamma_\rho\varepsilon_1\gamma^\rho\gamma^\mu\partial_\mu\Psi \\
&= -2i\overline{\varepsilon_2}\gamma^\mu\varepsilon_1\partial_\mu\Psi+i\overline{\varepsilon_2}\gamma^\rho\varepsilon_1\gamma_\rho\gamma^\mu\partial_\mu\Psi
\end{aligned} \tag{2.32}
$$

Box 9 - Identidad de Fierz

Dados dos espinores ε_1 y ε_2 la identidad de Fierz es [1, eq. (11.123)]

$$\varepsilon_2\overline{\varepsilon_1} = -\frac{1}{4}\left[\overline{\varepsilon_1}\varepsilon_2 + \overline{\varepsilon_1}\gamma^\mu\varepsilon_2\gamma_\mu - \overline{\varepsilon_1}\gamma^\mu\gamma^5\varepsilon_2\gamma_\mu\gamma^5 + 2\overline{\varepsilon_1}\Sigma^{\mu\nu}\varepsilon_2\Sigma_{\mu\nu} + \overline{\varepsilon_1}\gamma^5\varepsilon_2\gamma^5\right] \tag{2.33}$$

Box 10 - Más identidades de los espinores de Majorana

Dados dos ε_1 y ε_2 dos espinores de Majorana, entonces valen las siguientes identidades

$$\begin{cases} \overline{\varepsilon_2}\varepsilon_1 = \overline{\varepsilon_1}\varepsilon_2 \\ \overline{\varepsilon_2}\gamma^\mu\varepsilon_1 = -\overline{\varepsilon_1}\gamma^\mu\varepsilon_2 \\ \overline{\varepsilon_2}\gamma^\mu\gamma^5\varepsilon_1 = \overline{\varepsilon_1}\gamma^\mu\gamma^5\varepsilon_2 \\ \overline{\varepsilon_2}\Sigma^{\mu\nu}\varepsilon_1 = -\overline{\varepsilon_1}\Sigma^{\mu\nu}\varepsilon_2 \\ \overline{\varepsilon_2}\gamma^5\varepsilon_1 = \overline{\varepsilon_1}\gamma^5\varepsilon_2 \end{cases} \tag{2.34}$$

donde $\Sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{4}\left[\gamma^\mu, \gamma^\nu\right]$. La identidad $\overline{\varepsilon_2}\gamma^\mu\varepsilon_1 = -\overline{\varepsilon_1}\gamma^\mu\varepsilon_2$ ya fue demostrada en el box 4. La demostración de las demás identidades es similar y sale de usar la definición de conjugación de Dirac, $\overline{\psi} = \psi^T\gamma^0$, y la definición de espinor de Majorana (ver box 1).

Se ha encontrado entonces que

$$\begin{cases} \left[\delta_1, \delta_2\right] A = 2i\overline{\varepsilon_1}\gamma^\mu\varepsilon_2\partial_\mu A \\ \left[\delta_1, \delta_2\right] B = 2i\overline{\varepsilon_1}\gamma^\mu\varepsilon_2\partial_\mu B \\ \left[\delta_1, \delta_2\right] \Psi = 2i\overline{\varepsilon_1}\gamma^\mu\varepsilon_2\partial_\mu\Psi - i\overline{\varepsilon_1}\gamma^\rho\varepsilon_2\gamma_\rho\gamma^\mu\partial_\mu\Psi \end{cases} \tag{2.35}$$

Como se puede ver para A y B se obtuvo el mismo resultado, tal como se estaba buscando. Sin embargo para Ψ se obtuvo un término adicional. En aquellas situaciones en las que se cumpla la ecuación clásica de movimiento[1], $\gamma^\mu\partial_\mu\Psi = 0$, el último término se anulará y en consecuencia el grupo de supersimetría será cerrado en los campos A, B y Ψ. Es por esto que el modelo con el lagrangiano (2.1) se llama *on-shell*. Sin embargo en el caso de un campo cuántico la ecuación clásica de movimiento sólo se satisface por la trayectoria clásica, mas todas las demás también contribuyen a la acción. Esto hace que no sea posible definir "$[\delta_1, \delta_2] =$ algo independiente del campo sobre el que actúa". Para remediar esto se deberán añadir dos campos escalares auxiliares F y G, en la sección siguiente.

3. El modelo de Wess-Zumino *off-shell*

Para obtener una teoría que sea invariante ante transformaciones supersimétricas más allá de la validez de la ecuación clásica de movimiento, se añaden dos campos auxiliares F y G de modo que el lagrangiano sea

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu A\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu B\right)^2 + \frac{i}{4}\overline{\Psi}\gamma^\mu\overleftrightarrow{\partial}_\mu\Psi + \frac{1}{2}F^2 + \frac{1}{2}G^2 \rightarrow \text{Off-shell massless Wess-Zumino} \tag{3.1}$$

es invariante frente a una transformación supersimétrica de la forma

$$\text{Transformación supersimétrica} \rightarrow \begin{cases} \delta A = \overline{\varepsilon}\Psi \\ \delta B = i\overline{\varepsilon}\gamma^5\Psi \\ \delta F = i\overline{\varepsilon}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi \\ \delta G = -\overline{\varepsilon}\gamma^5\gamma^\mu\partial_\mu\Psi \\ \delta\Psi = \gamma^\mu\left(-i\partial_\mu A + \gamma^5\partial_\mu B\right)\varepsilon - \left(F + i\gamma^5 G\right)\varepsilon \\ \delta\overline{\Psi} = \overline{\varepsilon}\left(i\partial_\mu A - \gamma^5\partial_\mu B\right)\gamma^\mu - \overline{\varepsilon}\left(F + i\gamma^5 G\right) \end{cases} \tag{3.2}$$

Además este conjunto de campos A, B, F, G y Ψ es cerrado frente a aplicaciones sucesivas de esta transformación, es decir que estas transformaciones forman un grupo.

[1] La ecuación clásica de movimiento para un fermión es la ecuación de Dirac $\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\Psi = 0$. Como en este caso se está considerando un campo sin masa entonces se reduce a $\gamma^\mu\partial_\mu\Psi = 0$.

3.1. Invariancia de la acción

Para verificar esto se harán las cuentas en forma explícita. En primer lugar considérese

$$\begin{aligned} \delta\mathscr{L} &= \delta\left[\frac{1}{2}(\partial_\mu A)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu B)^2\right] + \delta\left[\frac{i}{4}\overline{\Psi}\gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \Psi\right] + \delta\left[\frac{1}{2}F^2 + \frac{1}{2}G^2\right] \\ &= \delta\mathscr{L}_{AB} + \delta\mathscr{L}_\Psi + \delta\mathscr{L}_{FG} \end{aligned}$$

Debido a que la definición de δA y δB en la nueva transformación supersimétrica (3.2) es idéntica a la definida previamente en (2.5) se tiene que $\delta\mathscr{L}_{AB}$ es igual a (2.6), i.e.

$$\delta\mathscr{L}_{AB} = \overline{\varepsilon}\left[\partial_\mu A + i\gamma^5 \partial_\mu B\right]\partial^\mu \Psi \leftarrow \text{Eq. (2.6)} \tag{3.3}$$

Por otro lado $\delta\mathscr{L}_\Psi$ no necesariamente será igual ya que se modificó la definición de $\delta\Psi$. La primera parte del cálculo procede igual, i.e. se puede tomar como punto de partida la ecuación (2.12):

$$\begin{aligned} \delta\mathscr{L}_\Psi &= i\delta\overline{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi + \partial_\mu \Xi^\mu \leftarrow \text{Eq. (2.12)} \\ \delta\overline{\Psi} = \cdots \rightarrow \quad &= i\overline{\varepsilon}\left(i\partial_\rho A - \gamma^5\partial_\rho B\right)\gamma^\rho\gamma^\mu\partial_\mu\Psi + \partial_\mu\Xi^\mu - i\overline{\varepsilon}\left(F + i\gamma^5 G\right)\gamma^\mu\partial_\mu\Psi \\ &= \delta\mathscr{L}_{(2.16)} - i\overline{\varepsilon}\left(F + i\gamma^5 G\right)\gamma^\mu\partial_\mu\Psi \end{aligned}$$

donde $\delta\mathscr{L}_{(2.16)}$ es exactamente la expresión de la ecuación (2.16). En su momento se vio que $\delta\mathscr{L}_{(2.16)} = -\delta\mathscr{L}_{AB} + \partial_\mu\Upsilon^\mu$. Entonces, hasta ahora, se tiene que

$$\begin{aligned} \delta\mathscr{L} &= \cancel{\delta\mathscr{L}_{AB}} - \overbrace{\cancel{\delta\mathscr{L}_{AB}} + \partial_\mu\Upsilon^\mu - i\overline{\varepsilon}\left(F + i\gamma^5 G\right)\gamma^\mu\partial_\mu\Psi}^{\delta\mathscr{L}_\Psi} + \delta\mathscr{L}_{FG} \\ &= -i\overline{\varepsilon}\left(F + i\gamma^5 G\right)\gamma^\mu\partial_\mu\Psi + \delta\mathscr{L}_{FG} + \partial_\mu\Upsilon^\mu \end{aligned}$$

Para que la acción permanezca invariante será necesario que $\delta\mathscr{L}_{FG} = i\overline{\varepsilon}\left(F + i\gamma^5 G\right)\gamma^\mu\partial_\mu\Psi$ (a menos de una divergencia) de modo tal que se anule este término adicional que se obtuvo.

Por último, para $\delta\mathscr{L}_{FG}$ la cuenta es

$$\begin{aligned} \delta\mathscr{L}_{FG} &= \frac{1}{2}\left[\delta\left(F^2\right) + \delta\left(G^2\right)\right] \\ &= F\delta F + G\delta G \\ \left.\begin{aligned} \delta F = i\overline{\varepsilon}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi \\ \delta G = -\overline{\varepsilon}\gamma^5\gamma^\mu\partial_\mu\Psi \end{aligned}\right\} \rightarrow \quad &= iF\overline{\varepsilon}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - G\overline{\varepsilon}\gamma^5\gamma^\mu\partial_\mu\Psi \\ &= i\overline{\varepsilon}\left(F + i\gamma^5 G\right)\gamma^\mu\partial_\mu\Psi \ \checkmark \end{aligned}$$

con lo cual, finalmente, $\delta\mathscr{L} = \partial_\mu\Upsilon^\mu$ y en consecuencia la acción que se obtiene de (3.1) permanecerá invariante frente a la transformación supersimétrica definida en (3.2).

3.2. El grupo de supersimetría

Verifiquemos ahora que la transformación definida en (3.2) forma un grupo en el conjunto de campos $\{A, B, F, G, \Psi\}$. Para ello vamos a verificar que

$$\text{Verificaremos que} \rightarrow \begin{cases} [\delta_1, \delta_2]\, A = \Delta A \\ [\delta_1, \delta_2]\, B = \Delta B \\ [\delta_1, \delta_2]\, F = \Delta F \\ [\delta_1, \delta_2]\, G = \Delta G \\ [\delta_1, \delta_2]\, \Psi = \Delta \Psi \\ [\delta_1, \delta_2]\, \overline{\Psi} = \Delta \overline{\Psi} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad [\delta_1, \delta_2] = \Delta \tag{3.4}$$

de una forma similar a la que se hizo en la sección 2.2. En primer lugar

$$\delta_1\delta_2 A = \overline{\varepsilon_2}\gamma^\mu\left(-i\partial_\mu A + \gamma^5\partial_\mu B\right)\varepsilon_1 - \overline{\varepsilon_2}\left(F + i\gamma^5 G\right)\varepsilon_1 \tag{3.5}$$

por lo que

$$\begin{aligned} [\delta_1, \delta_2]\, A &= \overline{\varepsilon_2}\gamma^\mu\left(-i\partial_\mu A + \gamma^5\partial_\mu B\right)\varepsilon_1 - \overline{\varepsilon_2}\left(F + i\gamma^5 G\right)\varepsilon_1 + \dots \\ &\qquad \cdots - \overline{\varepsilon_1}\gamma^\mu\left(-i\partial_\mu A + \gamma^5\partial_\mu B\right)\varepsilon_2 + \overline{\varepsilon_1}\left(F + i\gamma^5 G\right)\varepsilon_2 \\ \left.\begin{aligned} \overline{\varepsilon_2}\varepsilon_1 &= \overline{\varepsilon_1}\varepsilon_2 \\ \overline{\varepsilon_2}\gamma^\mu\varepsilon_1 &= -\overline{\varepsilon_1}\gamma^\mu\varepsilon_2 \\ \overline{\varepsilon_2}\gamma^\mu\gamma^5\varepsilon_1 &= \overline{\varepsilon_1}\gamma^\mu\gamma^5\varepsilon_2 \\ \overline{\varepsilon_2}\gamma^5\varepsilon_1 &= \overline{\varepsilon_1}\gamma^5\varepsilon_2 \end{aligned}\right\} \rightarrow \quad &= 2i\overline{\varepsilon_1}\gamma^\mu\varepsilon_2\partial_\mu A \end{aligned}$$

donde se utilizaron algunas de las identidades del box 10. Para $[\delta_1, \delta_2] B$ la cuenta es prácticamente idéntica. En el caso del campo F se tiene que

$$\begin{aligned}
\delta_1\delta_2 F &= i\overline{\varepsilon_2}\gamma^\mu\partial_\mu\left(\gamma^\nu\left(-i\partial_\nu A+\gamma^5\partial_\nu B\right)\varepsilon_1-\left(F+i\gamma^5 G\right)\varepsilon_1\right)\\
&= i\overline{\varepsilon_2}\gamma^\mu\gamma^\nu\partial_\mu\partial_\nu\left(-iA+\gamma^5 B\right)\varepsilon_1-i\overline{\varepsilon_2}\gamma^\mu\partial_\mu\left(F+i\gamma^g G\right)\varepsilon_1\\
\gamma^\mu\gamma^\nu x_\mu x_\nu = x^\mu x_\nu \rightarrow \quad &= i\overline{\varepsilon_2}\partial^\mu\partial_\mu\left(-iA+\gamma^5 B\right)\varepsilon_1-i\overline{\varepsilon_2}\gamma^\mu\partial_\mu\left(F+i\gamma^g G\right)\varepsilon_1
\end{aligned}$$

donde se ha utilizado la conmutación de δ y ∂ (producto de que la transformación supersimétrica no depende de las coordenadas x^μ, ver box 3) y la identidad del box 7 teniendo en cuenta que $\partial_\mu\partial_\nu$ es un tensor simétrico. Haciendo uso ahora las identidades para los espinores de Majorana (ver box 10) se obtiene

$$[\delta_1, \delta_2] F = 2i\overline{\varepsilon_1}\gamma^\mu\varepsilon_2\partial_\mu F \tag{3.6}$$

Para el campo G la cuenta es prácticamente idéntica.

Para el campo Ψ el procedimiento es como sigue

$$\begin{aligned}
\delta_1\delta_2\Psi &= \gamma^\mu\left(-i\overline{\varepsilon_1}\partial_\mu\Psi+\gamma^5 i\overline{\varepsilon_1}\gamma^5\partial_\mu\Psi\right)\varepsilon_2-\left(i\overline{\varepsilon_1}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi-i\gamma^5\overline{\varepsilon_1}\gamma^5\gamma^\mu\partial_\mu\Psi\right)\varepsilon_2\\
&= \left(-i\gamma^\mu\varepsilon_2\overline{\varepsilon_1}+i\gamma^\mu\gamma^5\varepsilon_2\overline{\varepsilon_1}\gamma^5-i\varepsilon_2\overline{\varepsilon_1}\gamma^\mu+i\gamma^5\varepsilon_2\overline{\varepsilon_1}\gamma^5\gamma^\mu\right)\partial_\mu\Psi\\
&= \text{Eq. (2.28)}+\left(-i\varepsilon_2\overline{\varepsilon_1}\gamma^\mu+i\gamma^5\varepsilon_2\overline{\varepsilon_1}\gamma^5\gamma^\mu\right)\partial_\mu\Psi
\end{aligned}$$

Usando que al calcular $[\delta_1, \delta_2]\Psi$ la ecuación (2.28) se transformó en (2.32) se tiene que

$$\begin{aligned}
[\delta_1, \delta_2]\Psi &= \text{Eq. (2.32)}+\left(-i\varepsilon_2\overline{\varepsilon_1}\gamma^\mu+i\gamma^5\varepsilon_2\overline{\varepsilon_1}\gamma^5\gamma^\mu\right)\partial_\mu\Psi-\left(-i\varepsilon_1\overline{\varepsilon_2}\gamma^\mu+i\gamma^5\varepsilon_1\overline{\varepsilon_2}\gamma^5\gamma^\mu\right)\partial_\mu\Psi\\
&= \text{Eq. (2.32)}+i\left[\varepsilon_1\overline{\varepsilon_2}-\varepsilon_2\overline{\varepsilon_1}-\gamma^5\left(\varepsilon_1\overline{\varepsilon_2}-\varepsilon_2\overline{\varepsilon_1}\right)\gamma^5\right]\gamma^\mu\partial_\mu\Psi
\end{aligned}$$

Utilizando la identidad de Fierz (ver box 9) se puede mostrar[2] que

$$\varepsilon_1\overline{\varepsilon_2}-\varepsilon_2\overline{\varepsilon_1}-\gamma^5\left(\varepsilon_1\overline{\varepsilon_2}-\varepsilon_2\overline{\varepsilon_1}\right)\gamma^5=\overline{\varepsilon_1}\rho^\rho\varepsilon_2\gamma_\rho \tag{3.7}$$

por lo que

$$\begin{aligned}
[\delta_1, \delta_2]\Psi &= \text{Eq. (2.32)}+i\overline{\varepsilon_1}\rho^\rho\varepsilon_2\gamma_\rho\gamma^\mu\partial_\mu\Psi\\
&= -2i\overline{\varepsilon_2}\gamma^\mu\varepsilon_1\partial_\mu\Psi+i\overline{\varepsilon_2}\gamma^\rho\varepsilon_1\gamma_\rho\gamma^\mu\partial_\mu\Psi+i\overline{\varepsilon_1}\rho^\rho\varepsilon_2\gamma_\rho\gamma^\mu\partial_\mu\Psi\\
\overline{\varepsilon_2}\gamma^\mu\varepsilon_1=-\overline{\varepsilon_1}\gamma^\mu\varepsilon_2 \rightarrow \quad &= 2i\overline{\varepsilon_1}\gamma^\mu\varepsilon_2\partial_\mu\Psi
\end{aligned}$$

Esto es lo mismo que para los campos escalares, tal como se buscaba. Para $\overline{\Psi}$ ocurre algo completamente análogo.

4. Modelo de Wess-Zumino *off-shell* con masa

Tanto en el modelo de Wess-Zumino *on-shell* (2.1) como en el modelo *off-shell* (3.1) los campos utilizados fueron considerados sin masa. Sin embargo es posible añadir un término de masa a (3.1) del siguiente modo

$$\mathscr{L}=\underbrace{\frac{1}{2}\left(\partial_\mu A\right)^2+\frac{1}{2}\left(\partial_\mu B\right)^2+\frac{i}{4}\overline{\Psi}\gamma^\mu\overleftrightarrow{\partial}_\mu\Psi+\frac{1}{2}F^2+\frac{1}{2}G^2}_{\text{Wess-Zumino off-shell (3.1)}}+\underbrace{m\left(\frac{1}{2}\overline{\Psi}\Psi+AF+BG\right)}_{\text{Término de masa}\equiv\mathscr{L}_m} \tag{4.1}$$

manteniendo la invariancia ante transformaciones supersimétricas dadas por (3.2). Para verificar esto basta con hacer la cuenta únicamente para el término de masa ya que el lagrangiano (3.1) ya demostró producir una acción invariante. Para el

[2] Esto ya se hizo antes, ver las ecuaciones (2.29), (2.30) y (2.31).

LOS RESUELTOS DE ALF ←click me!

término de masa esto es

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{m}\delta\mathscr{L}_m &= \frac{1}{2}\left(\delta\overline{\Psi}\right)\Psi + \frac{1}{2}\overline{\Psi}\left(\delta\Psi\right) + \left(\delta A\right)F + A\left(\delta F\right) + \left(\delta B\right)G + B\left(\delta G\right) \\
&= \frac{1}{2}\underbrace{\left[\bar{\varepsilon}\left(i\partial_\mu A - \gamma^5\partial_\mu B\right)\gamma^\mu - \bar{\varepsilon}\left(F + i\gamma^5 G\right)\right]}_{\delta\overline{\Psi}}\Psi + \dots \\
&\quad \dots + \frac{1}{2}\overline{\Psi}\underbrace{\left[\gamma^\mu\left(-i\partial_\mu A + \gamma^5\partial_\mu B\right)\varepsilon - \left(F + i\gamma^5 G\right)\varepsilon\right]}_{\delta\Psi} + \dots \\
&\quad \dots + \underbrace{\bar{\varepsilon}\Psi}_{\delta A}F + A\underbrace{i\bar{\varepsilon}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi}_{\delta F} + \underbrace{i\bar{\varepsilon}\gamma^5\Psi}_{\delta B}G + B\underbrace{\left[-\bar{\varepsilon}\gamma^5\gamma^\mu\partial_\mu\Psi\right]}_{\delta G} \\
&= \frac{i}{2}\bar{\varepsilon}\gamma^\mu\Psi\partial_\mu A - \frac{1}{2}\bar{\varepsilon}\gamma^5\gamma^\mu\Psi\partial_\mu B - \frac{1}{2}\bar{\varepsilon}\Psi F - \frac{i}{2}\bar{\varepsilon}\gamma^5\Psi G + \dots \\
&\quad \dots - \frac{i}{2}\overline{\Psi}\gamma^\mu\varepsilon\partial_\mu A + \frac{1}{2}\overline{\Psi}\gamma^\mu\gamma^5\varepsilon\partial_\mu B - \frac{1}{2}\overline{\Psi}\varepsilon F - \frac{i}{2}\overline{\Psi}\gamma^5\varepsilon G + \dots \\
&\quad \dots + \bar{\varepsilon}\Psi F + iA\bar{\varepsilon}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi + i\bar{\varepsilon}\gamma^5\Psi G - B\bar{\varepsilon}\gamma^5\gamma^\mu\partial_\mu\Psi \\
\left\{\gamma^5,\gamma^\mu\right\} = 0 \rightarrow \quad &= \frac{i}{2}\bar{\varepsilon}\gamma^\mu\Psi\partial_\mu A + \frac{1}{2}\bar{\varepsilon}\gamma^\mu\gamma^5\Psi\partial_\mu B - \frac{1}{2}\bar{\varepsilon}\Psi F - \frac{i}{2}\bar{\varepsilon}\gamma^5\Psi G + \dots \\
&\quad \dots - \frac{i}{2}\overline{\Psi}\gamma^\mu\varepsilon\partial_\mu A + \frac{1}{2}\overline{\Psi}\gamma^\mu\gamma^5\varepsilon\partial_\mu B - \frac{1}{2}\overline{\Psi}\varepsilon F - \frac{i}{2}\overline{\Psi}\gamma^5\varepsilon G + \dots \\
&\quad \dots + \bar{\varepsilon}\Psi F + iA\bar{\varepsilon}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi + i\bar{\varepsilon}\gamma^5\Psi G + B\bar{\varepsilon}\gamma^\mu\gamma^5\partial_\mu\Psi \\
\left.\begin{array}{r}
\bar{\xi}\gamma^\mu\eta = -\bar{\eta}\gamma^\mu\xi \\
\bar{\xi}\gamma^\mu\gamma^5\eta = \bar{\eta}\gamma^\mu\gamma^5\xi \\
\bar{\xi}\eta = \bar{\eta}\xi \\
\bar{\xi}\gamma^5\eta = \bar{\eta}\gamma^5\xi
\end{array}\right\} \rightarrow \quad &= i\bar{\varepsilon}\gamma^\mu\Psi\partial_\mu A + \bar{\varepsilon}\gamma^\mu\gamma^5\Psi\partial_\mu B - \cancel{\bar{\varepsilon}\Psi F} - \cancel{i\bar{\varepsilon}\gamma^5\Psi G} + \dots \\
&\quad \dots + \cancel{\bar{\varepsilon}\Psi F} + iA\bar{\varepsilon}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi + \cancel{i\bar{\varepsilon}\gamma^5\Psi G} + B\bar{\varepsilon}\gamma^\mu\gamma^5\partial_\mu\Psi \\
&= \partial_\mu\left(i\bar{\varepsilon}\gamma^\mu\Psi A\right) + \partial_\mu\left(\bar{\varepsilon}\gamma^\mu\gamma^5\Psi B\right) \\
&= \partial_\mu\left(\text{algo}\right)
\end{aligned}
$$

y como $\delta\mathscr{L}_m$ es una divergencia, la acción no cambiará tal como se anticipó. Obsérvese que esto no hubiera ocurrido si m no era igual para todos los campos.

4.1. Caso *on-shell*

Para concluir se mostrará que definiendo un campo escalar complejo

$$\phi \overset{\text{def}}{=} \frac{A + iB}{\sqrt{2}} \rightarrow \text{Campo escalar complejo} \tag{4.2}$$

y limitándose al caso en que se satisface la ecuación de movimiento clásica, i.e. cuando se cumplen las ecuaciones de Euler-Lagrange, el lagrangiano (4.1) puede reescribirse como

$$\mathscr{L} = \partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - m^2\phi^*\phi + \frac{i}{4}\overline{\Psi}\gamma^\mu\overleftrightarrow{\partial}_\mu\Psi + \frac{m}{2}\overline{\Psi}\Psi \rightarrow \text{On-shell con masa} \tag{4.3}$$

Para ello basta con calcular las ecuaciones de Euler-Lagrange para los campos F y G usando el lagrangiano (4.1)

$$\text{Euler-Lagrange} \rightarrow \begin{cases} \partial_\mu\left(\dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\partial_\mu F\right)}\right) - \dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial F} = 0 \\ \partial_\mu\left(\dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\partial_\mu G\right)}\right) - \dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial G} = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} F + mA = 0 \\ G + mB = 0 \end{cases} \tag{4.4}$$

lo cual implica que, para el caso en que se cumplen las ecuaciones de movimiento clásicas,

$$\text{On-shell} \Rightarrow \begin{cases} F = -mA \\ G = -mB \end{cases} \tag{4.5}$$

Reemplazando en (4.1) se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathscr{L} &= \frac{1}{2}\left(\partial_\mu A\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu B\right)^2 + \frac{i}{4}\overline{\Psi}\gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \Psi + \frac{m^2}{2}A^2 + \frac{m^2}{2}B^2 + m\left(\frac{1}{2}\overline{\Psi}\Psi - mA^2 - mB^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\partial_\mu A\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu B\right)^2 - \frac{m^2}{2}A^2 - \frac{m^2}{2}B^2 + \frac{i}{4}\overline{\Psi}\gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \Psi + \frac{m}{2}\overline{\Psi}\Psi \\
\phi \overset{\text{def}}{=} \frac{A+iB}{\sqrt{2}} \rightarrow \quad &= \left(\partial_\mu \phi^*\right)\left(\partial_\mu \phi\right) - m^2\phi^*\phi + \frac{i}{4}\overline{\Psi}\gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \Psi + \frac{m}{2}\overline{\Psi}\Psi
\end{aligned}$$

5. Conclusión

Se estudió un modelo muy simple que es supersimétrico. Una transformación de supersimetría es una transformación que mezcla bosones y fermiones. Una teoría (i.e. una acción) puede (o no) ser invariante frente a transformaciones supersimétricas, del mismo modo que puede (o no) ser invariante frente a transformaciones de Lorentz. Si una teoría es invariante frente a una transformación de supersimetría, se dice que dicha teoría es supersimétrica.

Para poder ser supersimétrica una teoría debe tener, por supuesto, tanto campos bosónicos como fermiónicos. Además estos campos bosónicos y fermiónicos deben tener una determinada estructura. En el modelo que se estudió en este trabajo se encontró que un campo espinorial de Majorana debe estar acompañado de cuatro campos escalares reales para poder generar una acción invariante frente a una transformación de supersimetría particular.

Referencias

[1] Lewis H Ryder. *Quantum field theory*. Cambridge university press, 1996.