

Problemas de las guías de Estructura de la Materia 4

Diciembre de 2018



Sobre estos apuntes Estos apuntes/resueltos fueron creados por un alumno mientras cursaba la materia. Es por ello que podrían haber errores de tipeo, errores conceptuales, de interpretación en los resultados, etc. Use estos apuntes con precaución. Estos apuntes no son oficiales de ninguna cátedra. Lea atentamente el prospecto. En caso de notar algún efecto adverso suspenda inmediatamente su uso y consulte con su profesor de cabecera.

- El alumno autor de estos apuntes cursó la materia el segundo cuatrimestre de 2018, [este link](#) conduce a la página oficial del curso.
- Encontrá más resueltos de Alf en [este link](#).

Box 1 - ¿Cómo se hacen estos apuntes?

Estos apuntes están hechos usando un programa llamado [Lyx](#)^a. Para hacer los dibujos se usó [Inkscape](#) y después se insertó las imágenes en formato [svg](#)^b directamente en Lyx.

En [este repositorio de GitHub](#) se encuentra la plantilla (*template*) que Alf usa actualmente, con todo lo necesario para compilarla y empezar a divertirse.

^aLyx es una interfaz gráfica para Latex que hace que la escritura se vuelva extremadamente fluida y veloz (al punto de poderse tomar apuntes en vivo durante una clase).

^bsvg es el formato nativo de Inkscape.

Consignas de las guías de problemas guía 3, guía 4, guía 5, guía 6, guía 7a, guía 7b, guía 8, guía 9.

Índice

Guía 3 - Simetrías aproximadas en modelos de hadrones	6
Problema 1	6
Ítem a	6
Ítem b	8
Problema 2	8
Problema 3 (preguntar)	9
Guía 4 - Simetría SU (3) y modelo de quarks	10
Problema 1	10
Problema 2	10
Ítem a	10
Ítem b	11
Ítem c	11
Ítem d	11
Problema 3	12
Ítem b	12
Problema 4	12
Ítem a	12

Ítem b	14
Problema 12	15
Ítem b	15
Problema 13	16
Ítem a	16
Ítem c	17
Problema 14	17
Ítem a (octete mesónico)	17
Ítem b (singlete mesónico)	19
Guía 5 - Ecuaciones de onda relativistas: Dirac y Klein-Gordon	20
Problema 1	20
Ítem a	20
Ítem b	20
Ítem c	21
Problema 3	21
Ítem b	21
Ítem c	22
Problema 5	22
Problema 6	23
Ítem a	23
Ítem b	24
Ítem c	26
Problema 8	26
Ítems a y b	26
Problema 9	27
Ítem a	27
Ítem b	27
Ítem c	27
Ítem d	27
Problema 10	27
Problema 11	28
Ítem a	28
Ítem b	28
Ítem c	29
Problema 12	29
Ítem a	29
Ítem b	29
Problema 13	30
Ítem a	30
Ítem b	30
Problema 14	31
Problema 15	31
Guía 6 - Formulación lagrangiana	34
Problema 1	34
Ítem a	34
Ítem b	36
Ítem c	36
Ítem d	36
Problema 2	37
Ítems a y b	38
Ítem c	38
Problema 4	38
Ítem a	38
Ítem b	39
Problema 5	39
Ítem a	39
Ítem b	40
Problema 6 (pregunta para nada crucial pero que me gustaría saber)	40
Ítem a	41

Ítem c	41
Guía 7A - Teorías de gauge (caso abeliano)	44
Problema 1	44
Ítem a	44
Ítem b	44
Ítem c	45
Ítem d	45
Ítem e	45
Problema 2	45
Ítem a	45
Ítem b	46
Problema 3	46
Ítem a	46
Ítem b	46
Ítem c	46
Problema 4	47
Ítem a	47
Ítem b	47
Ítem c	47
Guía 7B - Teorías de gauge (caso no abeliano)	48
Problema 1	48
Ítem a	48
Ítem b	49
Ítem c	50
Ítem d	50
Problema 2	50
Ítem a	50
Ítem b	51
Ítem c	51
Ítem d	52
Problema 3	52
Problema 4	53
Problema 5	53
Ítem a	53
Ítem b	53
Ítem c	53
Problema 6	54
Ítem a	54
Ítem b	54
Guía 8 - Un mundo sin Higgs, Sector QCD	55
Problema 1	55
Ítem a (cómo compilar el lagrangiano de QCD + vértices)	55
Ítem b	56
Ítem c	57
Problema 2	57
Ítem a	57
Ítem b	57
Ítem c	57
Ítem d	57
Guía 8 - Un mundo sin Higgs, sector electrodébil	58
Problema 1	58
Ítem a	58
Ítem b	59
Problema 2	60
Problema 3	62
Ítem a	62
Ítem b	63

Ítem c	64
Ítem d	65
Problema 4	66
Problema 5 (Vértices E.W.)	66
Problema 6	67
Problema 7 (Carga eléctrica de los campos)	68
Problema 8	70
Problema 9	74
Problema 10	74
Problema 11	76
Guía 9 - Modelo estándar y Mecanismo de Higgs	77
Problema 1	77
Problema 2	78
Problema 3	79
Ítem a	79
Ítem b	81
Problema 4	81
Problema 5	81
Problema 6 ($U(1)_Y \times SU(2)_L$, Higgs para fermiones)	82
Ítem a	82
Ítem b	83
Problema 7	84
Problema 8	84
Fórmulas	86

Índice de *boxes*

1. Box 1 - ¿Cómo se hacen estos apuntes?	1
2. Box 2 - Suma de espín y suma de isospín	7
3. Box 3 - El grupo unitario	10
4. Box 4 - El grupo unitario especial	10
5. Box 5 - Propiedades de e^{matriz}	10
6. Box 6 - $2 \otimes 2 \otimes 2$: quarks vs espín	13
7. Box 7 - Los distintos espacios en los que trabajamos con Dirac	24
8. Box 8 - Operadores y espinores abstractos vs matrices gamma y todo eso	32
9. Box 9 - Transformación de similaridad entre base de Dirac y de Weyl	32
10. Box 10 - El grupo $U(N)$	34
11. Box 11 - El grupo $SU(N)$	34
12. Box 12 - Álgebra $su(N)$	34
13. Box 13 - La corriente de Noether y la carga conservada	35
14. Box 14 - La posición de los índices	48
15. Box 15 - Criterio de sumación de índices de Einstein y notación	55
16. Box 16 - Sobre los grupos de simetría que estamos usando en la teoría electrodébil	59
17. Box 17 - ¿Sabías que...	65
18. Box 18 - ¿Sabías que...	74
19. Box 19 - Diagramas de Feynman para dummies	84
20. Box 20 - ¿Sabías que...	85
21. Box 21 - Fórmulas matemáticas	86
22. Box 22 - Fórmulas relatividad	86
23. Box 23 - Fórmulas isospín y $SU(3)$	86
24. Box 24 - Fórmulas de ecuaciones de onda relativistas	87
25. Box 25 - Fórmulas de formulación lagrangiana	88
26. Box 26 - Fórmulas gauge no abeliano	88
27. Box 27 - Fórmulas modelo estándar	88
28. Box 28 - Vértices modelo estándar	89

PREGUNTAS

1.	PREGUNTA 1 - Formula diferente en clase	53
2.	PREGUNTA 2 - No tengo idea cómo hacer este...	53
3.	PREGUNTA 3 - No sé cómo terminar este problema	54
4.	PREGUNTA 4 - Conservación de número leptónico usando teorema de Noether	67
5.	PREGUNTA 5 - Simetría global de carga eléctrica	70
6.	PREGUNTA 6 - Cómo es un 'pi cero' en un diagrama de Feynman?	75

Guía 3 - Simetrías aproximadas en modelos de hadrones

Problema 1

Ítem a

Queremos ver que $\frac{\sigma(pp \rightarrow \pi^+ d)}{\sigma(np \rightarrow \pi^0 d)} = 2$. Para ello vamos a recordar de Teórica 2 que la sección eficaz σ de un proceso A satisface

$$\sigma(A) \propto \mathbb{P}(A)$$

con lo cual vamos a tener que

$$\begin{cases} \sigma(pp \rightarrow \pi^+ d) \propto \mathbb{P}(pp \rightarrow \pi^+ d) = \left| \langle \pi^+ d | \overline{U_{t_2 \leftarrow t_1}} | pp \rangle \right|^2 \\ \sigma(np \rightarrow \pi^0 d) \propto \mathbb{P}(np \rightarrow \pi^0 d) = \left| \langle \pi^0 d | \overline{U_{t_2 \leftarrow t_1}} | np \rangle \right|^2 \end{cases}$$

donde $\overline{U_{t_2 \leftarrow t_1}}$ es el operador de evolución temporal.

Vamos a trabajar con el isospín de cada estado inicial y final. En primer lugar recordemos que el protón y el neutrón tienen isospín $I = \frac{1}{2}$ con proyección $I_3 = \pm \frac{1}{2}$ para el protón y el neutrón respectivamente. Es decir que

$$\text{Isospín } |I, I_3\rangle \rightarrow \begin{cases} p \equiv |p\rangle = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \\ n \equiv |n\rangle = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \end{cases}$$

En cuanto a los piones éstos tienen isospín $I = 1$ con las siguientes proyecciones

$$\text{Isospín } |I, I_3\rangle \rightarrow \begin{cases} \pi^+ \equiv |\pi^+\rangle = |1, 1\rangle \\ \pi^0 \equiv |\pi^0\rangle = |1, 0\rangle \\ \pi^- \equiv |\pi^-\rangle = |1, -1\rangle \end{cases}$$

Por último, la letra d hace referencia al **deuterón** (no al quark d) que es el núcleo del **deuterio**. Se trata de una partícula compuesta por un protón y un neutrón. Debido a que éstos tienen $I = \frac{1}{2}$ con proyección $I_3 = \pm \frac{1}{2}$ entonces el deuterón se puede considerar como una partícula que tiene $I = 0$ (con proyección $I_3 = 0$), es decir

$$d \equiv |d\rangle = |0, 0\rangle \rightarrow \text{Deuterón}$$

Los estados de la consigna son estados que suman dos partículas, es decir $\begin{cases} pp = p + p \\ pn = p + n \\ \pi^0 d = \pi^0 + d \\ \pi^+ d = \pi^+ + d \end{cases}$. Entonces el isospín del sistema

se puede expresar ya sea en la base acoplada o en la desacoplada

$$\text{Acoplado} \rightarrow \mathbf{I} = \mathbf{I}^{(1)} + \mathbf{I}^{(2)} \leftarrow \text{Desacoplado}$$

Es decir que se tiene lo siguiente:

Notación romántica	Notación posta (isospín en base desacoplada)	Desarrollo en base acoplada
$pp \equiv pp\rangle \equiv p\rangle \otimes p\rangle$	$\left \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \left \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$	$ 1, 1\rangle$
$\pi^+ d \equiv \pi^+ d\rangle \equiv \pi^+\rangle \otimes d\rangle$	$ 1, 1\rangle 0, 0\rangle$	$ 1, 1\rangle$
$np \equiv np\rangle \equiv n\rangle \otimes p\rangle$	$\left \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \left \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$	$\frac{ 1,0\rangle - 0,0\rangle}{\sqrt{2}}$
$\pi^0 d \equiv \pi^0 d\rangle \equiv \pi^0\rangle \otimes d\rangle$	$ 1, 0\rangle 0, 0\rangle$	$ 1, 0\rangle$

donde se usó, para la última columna, la tabla de coeficientes de Clebsch-Gordan. En lo anterior usé la siguiente notación para la suma de dos isospines

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}^{(1)} + \mathbf{I}^{(2)} \rightarrow \begin{cases} \left| I^{(1)}, I_3^{(1)} \right\rangle \left| I^{(2)}, I_3^{(2)} \right\rangle & \rightarrow \text{Base desacoplada} \\ \left| I^{(1)}, I^{(2)}, I, I_3 \right\rangle \equiv |I, I_3\rangle & \rightarrow \text{Base desacoplada} \end{cases}$$

Box 2 - Suma de espín y suma de isospín

Recordar de Teórica 2 que cuando sumamos dos momentos angulares tal que

$$\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{S}}_1 + \underline{\underline{S}}_2 \equiv \underline{\underline{S}}_1 \otimes \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{1}} \otimes \underline{\underline{S}}_2$$

entonces los autoestados de $\underline{\underline{S}}^2$ y de $\underline{\underline{S}}_z$ se podían expresar en términos de la base acoplada o la base desacoplada

$$\text{Base acoplada} \rightarrow |j_1, j_2, j, m\rangle = \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle \underbrace{\langle j_1, j_2; m_1, m_2 | j_1, j_2; j, m \rangle}_{\text{Clebsch-Gordan coefficient}}$$

$$\text{Base desacoplada} \rightarrow |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle = \sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \sum_{m=-j}^j |j_1, j_2, j, m\rangle \langle j_1, j_2; m_1, m_2 | j_1, j_2; j, m \rangle^*$$

Para el isospín ocurre lo mismo, por eso es iso-espín (ja). Si hay dos isospines $\underline{\underline{I}}^{(1)}$ y $\underline{\underline{I}}^{(2)}$ entonces el isospín suma

$$\underline{\underline{I}} = \underline{\underline{I}}^{(1)} + \underline{\underline{I}}^{(2)}$$

será tal que los autoestados de $\underline{\underline{I}}^2$ e $\underline{\underline{I}}_3$ se podrán expresar en la base acoplada o en la base desacoplada:

$$\text{Acoplada} \rightarrow |I^{(1)}, I^{(2)}, I, I_3\rangle = \sum_{I_3^{(1)}=-I^{(1)}}^{I^{(1)}} \sum_{I_3^{(2)}=-I^{(2)}}^{I^{(2)}} |I^{(1)}, I_3^{(1)}\rangle |I^{(2)}, I_3^{(2)}\rangle \underbrace{\langle I^{(1)}, I^{(2)}; I_3^{(1)}, I_3^{(2)} | I^{(1)}, I^{(2)}; I, I_3 \rangle}_{\text{Clebsch-Gordan coefficient}}$$

$$\text{Desacoplada} \rightarrow |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle = \sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \sum_{m=-j}^j |j_1, j_2, j, m\rangle \langle j_1, j_2; m_1, m_2 | j_1, j_2; j, m \rangle^*$$

Ahora usamos que hay invariancia de isospín en las interacciones fuertes lo cual implica que

$$\left[\underline{\underline{I}}, \underline{\underline{U}}_{t_2 \leftarrow t_1} \right] = 0 \rightarrow \text{Invariancia en interacción fuerte}$$

y entonces

$$\underline{\underline{U}}_{t_2 \leftarrow t_1} |I, I_3\rangle = |I, I_3\rangle$$

Esto quiere decir que la evolución temporal $\underline{\underline{U}}_{t_2 \leftarrow t_1}$ no modifica el isospín cuando (únicamente) actúa la interacción fuerte. Finalmente

$$\begin{aligned} \sigma(pp \rightarrow \pi^+ d) &\propto \mathbb{P}(pp \rightarrow \pi^+ d) \leftarrow \text{Esto lo sabemos de Teórica 2, ponelo...} \\ \mathbb{P}(A \rightarrow B) &= \left| \langle B | \underline{\underline{U}}_{t_2 \leftarrow t_1} | A \rangle \right|^2 \rightarrow = \left| \langle \pi^+ d | \underline{\underline{U}}_{t_2 \leftarrow t_1} | pp \rangle \right|^2 \\ \left. \begin{aligned} |pp\rangle &\equiv |1, 1\rangle \\ |\pi^+ d\rangle &\equiv |1, 1\rangle \end{aligned} \right\} &\rightarrow = \left| \langle 1, 1 | \underline{\underline{U}}_{t_2 \leftarrow t_1} | 1, 1 \rangle \right|^2 \\ \text{Invariancia} \Rightarrow \underline{\underline{U}}_{t_2 \leftarrow t_1} |1, 1\rangle &= |1, 1\rangle \rightarrow = |\langle 1, 1 | 1, 1 \rangle|^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

y en forma análoga

$$\begin{aligned} \sigma(np \rightarrow \pi^0 d) &\propto \left| \langle \pi^0 d | \underline{\underline{U}}_{t_2 \leftarrow t_1} | np \rangle \right|^2 \\ &\vdots \\ \left. \begin{aligned} |np\rangle &\equiv \frac{|1, 0\rangle - |0, 0\rangle}{\sqrt{2}} \\ |\pi^0 d\rangle &\equiv |1, 0\rangle \end{aligned} \right\} &\rightarrow = \left| \langle 1, 0 | \frac{|1, 0\rangle - |0, 0\rangle}{\sqrt{2}} \right|^2 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

con lo cual

$$\frac{\sigma(pp \rightarrow \pi^+ d)}{\sigma(np \rightarrow \pi^0 d)} = 2$$

Ítem b

Para este proceso se aplica lo mismo que para los del ítem previo:

$$\begin{aligned} \sigma(dd \rightarrow \alpha\pi^0) &\propto \mathbb{P}(dd \rightarrow \alpha\pi^0) \\ &\vdots \quad \text{Invariancia, isospín, etc...} \\ \left. \begin{aligned} |dd\rangle &\equiv |0,0\rangle \\ |\alpha\pi^0\rangle &\equiv |1,0\rangle \end{aligned} \right\} \rightarrow &= |\langle 0,0|1,0\rangle|^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Problema 2

De acuerdo con la consigna existen tres decaimientos que son

$$\begin{cases} \Sigma^{*0} \rightarrow \Sigma^- + \pi^+ \\ \Sigma^{*0} \rightarrow \Sigma^0 + \pi^0 \\ \Sigma^{*0} \rightarrow \Sigma^+ + \pi^- \end{cases}$$

Si miramos el dibujito que está en la última página de la guía 4 (que lo agregué a estos resueltos en la sección de fórmulas, ver en página 86) vamos a encontrar que la composición de cada una de estas partículas es

$$\begin{cases} \Sigma^{*0} \sim uds \\ \left\{ \begin{aligned} \Sigma^- &\sim dds \\ \Sigma^0 &\sim uds \\ \Sigma^+ &\sim uus \end{aligned} \right. \\ \left\{ \begin{aligned} \pi^- &\sim \bar{u}d \\ \pi^0 &\sim \bar{u}u + \bar{d}d + \bar{s}s \\ \pi^+ &\sim \bar{d}u \end{aligned} \right. \end{cases}$$

Usé el símbolo \sim debido a que podrían ser combinaciones lineales o cosas más raras (aún no manejo muy bien el tema, perdón). En términos de isospín cada partícula tiene

$$\text{Isospín} \rightarrow \begin{cases} \Sigma^{*0} \sim |1,0\rangle \\ \left\{ \begin{aligned} \Sigma^- &\sim |1,-1\rangle \\ \Sigma^0 &\sim |1,0\rangle \\ \Sigma^+ &\sim |1,1\rangle \end{aligned} \right. \\ \left\{ \begin{aligned} \pi^- &\sim |1,-1\rangle \\ \pi^0 &\sim |1,0\rangle \\ \pi^+ &\sim |1,1\rangle \end{aligned} \right. \end{cases}$$

con lo cual los estados finales son (suma de isospín, Clebsch-Gordan table)

$$\begin{cases} \Sigma^- + \pi^+ \sim |\Sigma^-\rangle |\pi^+\rangle = |1,-1\rangle |1,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} |2,0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |1,0\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} |0,0\rangle \\ \Sigma^0 + \pi^0 \sim |\Sigma^0\rangle |\pi^0\rangle = |1,0\rangle |1,0\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} |2,0\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} |0,0\rangle \\ \Sigma^+ + \pi^- \sim |\Sigma^+\rangle |\pi^-\rangle = |1,1\rangle |1,-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} |2,0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |1,0\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} |0,0\rangle \end{cases}$$

Ahora sí se puede estudiar la probabilidad de cada uno de los procesos de la misma forma que en el problema 1. Para el

primer canal se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\Sigma^{*0} \rightarrow \Sigma^- \pi^+) &= \left| \langle \Sigma^- \pi^+ | \overline{U_{t_2 \leftarrow t_1}} | \Sigma^{*0} \rangle \right|^2 \\ \left. \begin{aligned} \Sigma^{*0} &\sim |1, 0\rangle \\ \Sigma^- \pi^+ &\sim \frac{1}{\sqrt{6}} |2, 0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |1, 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} |0, 0\rangle \end{aligned} \right\} \rightarrow &= \left| \left(\frac{\langle 2, 0 |}{\sqrt{6}} - \frac{\langle 1, 0 |}{\sqrt{2}} + \frac{\langle 0, 0 |}{\sqrt{3}} \right) \overline{U_{t_2 \leftarrow t_1}} |1, 0\rangle \right|^2 \\ \overline{U_{t_2 \leftarrow t_1}} |I, I_3\rangle = |I, I_3\rangle &\rightarrow &= \left| \left(\frac{\langle 2, 0 |}{\sqrt{6}} - \frac{\langle 1, 0 |}{\sqrt{2}} + \frac{\langle 0, 0 |}{\sqrt{3}} \right) |1, 0\rangle \right|^2 \\ &= &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Haciendo la misma cuenta para los demás finalmente se termina obteniendo que la probabilidad para cada proceso es

$$\begin{cases} \mathbb{P}(\Sigma^{*0} \rightarrow \Sigma^- \pi^+) = \frac{1}{2} \\ \mathbb{P}(\Sigma^{*0} \rightarrow \Sigma^0 \pi^0) = 0 \\ \mathbb{P}(\Sigma^{*0} \rightarrow \Sigma^+ \pi^-) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Para verificar si el proceso $\Sigma^{*0} \rightarrow \Sigma^+ \pi^-$ satisface la conservación de momento y energía, consideraré el proceso en el sistema centro de masa. En este caso

$$\text{En sist. centro de masa} \rightarrow \begin{cases} (p_{\Sigma^{*0}})^\mu = \begin{bmatrix} m_{\Sigma^{*0}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ (p_{\Sigma^+})^\mu = \gamma_{\Sigma^+} \begin{bmatrix} m_{\Sigma^+} \\ \mathbf{p}_{\Sigma^+} \end{bmatrix} \\ (p_{\pi^-})^\mu = \gamma_{\pi^-} \begin{bmatrix} m_{\pi^-} \\ \mathbf{p}_{\pi^-} \end{bmatrix} \end{cases}$$

Por conservación de cuádrimomento se tiene que

$$(p_{\Sigma^{*0}})^\mu = (p_{\Sigma^+})^\mu + (p_{\pi^-})^\mu$$

por lo tanto necesariamente

$$\mathbf{p}_{\Sigma^+} = -\mathbf{p}_{\pi^-}$$

Por otro lado el invariante relativista $p^\mu p_\mu$ es, antes y después del decaimiento,

$$\begin{aligned} (p_{\Sigma^{*0}})^\mu (p_{\Sigma^{*0}})_\mu &= [(p_{\Sigma^+})^\mu + (p_{\pi^-})^\mu] [(p_{\Sigma^+})_\mu + (p_{\pi^-})_\mu] \\ (m_{\Sigma^{*0}})^2 &= [\gamma_{\Sigma^+} m_{\Sigma^+} + \gamma_{\pi^-} m_{\pi^-} \quad \mathbf{0}^T] \cdot \begin{bmatrix} \gamma_{\Sigma^+} m_{\Sigma^+} + \gamma_{\pi^-} m_{\pi^-} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ &= (\gamma_{\Sigma^+} m_{\Sigma^+} + \gamma_{\pi^-} m_{\pi^-})^2 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$m_{\Sigma^{*0}} = \gamma_{\Sigma^+} m_{\Sigma^+} + \gamma_{\pi^-} m_{\pi^-}$$

Debido a que las m son constantes positivas y las γ son variables positivas que van entre 1 y $+\infty$, para que esto tenga solución se requiere que

$$m_{\Sigma^{*0}} \geq m_{\Sigma^+} + m_{\pi^-}$$

La masa en reposo de las Σ se puede encontrar en [este link](#) en tanto que la masa en reposo del pión está en [este link](#) este link. Se tiene que

$$\begin{cases} m_{\Sigma^{*0}} = 1383 \pm 1 \text{ MeV} \\ m_{\Sigma^+} = 1189,37 \pm 0,07 \text{ MeV} \\ m_{\pi^-} = 139,570 \pm 0,003 \text{ MeV} \end{cases}$$

lo cual verifica la desigualdad \checkmark .

Problema 3 (preguntar)

Es exactamente igual que los anteriores? Qué significa eso de que “favorece”?

Guía 4 - Simetría SU (3) y modelo de quarks

Problema 1

La definición de los grupos es la de los siguientes box:

Box 3 - El grupo unitario

El **grupo unitario** $\mathbf{U}(n)$ es el grupo formado por las matrices unitarias de $n \times n$ y la operación de multiplicación de matrices. Esto es

$$\mathbf{U}(n) = (\{U \in \mathbb{C}^{n \times n} | U^{-1} = U^\dagger\}, \cdot)$$

En lo anterior $\{U \in \mathbb{C}^{n \times n} | U^{-1} = U^\dagger\}$ denota el conjunto de matrices unitarias y \cdot denota la operación “producto matricial”.

Box 4 - El grupo unitario especial

El **grupo unitario especial** $\mathbf{SU}(n)$ es el grupo formado por las matrices unitarias de $n \times n$ con determinante uno y la operación de multiplicación de matrices. Esto es

$$\mathbf{SU}(n) = (\{U \in \mathbb{C}^{n \times n} | U^{-1} = U^\dagger, \det U = 1\}, \cdot)$$

En lo anterior $\{U \in \mathbb{C}^{n \times n} | U^{-1} = U^\dagger, \det U = 1\}$ denota el conjunto de matrices unitarias con determinante 1 y \cdot denota la operación “producto matricial”.

La dimensión de $\mathbf{U}(n)$ es $\frac{n \times n}{2} - \frac{n}{2}$ en tanto que la dimensión de $\mathbf{SU}(n)$ es $\frac{n \times n}{2} - \frac{n}{2} - 1$ donde el 1 adicional viene de la restricción del determinante.

Box 5 - Propiedades de e^{matriz}

Sean $A, B \in \mathbb{C}^{m \times m}$ dos matrices, entonces se define

$$e^A \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

Se puede demostrar que valen las siguientes propiedades

- $(e^A)^\dagger = e^{A^\dagger}$.
- $\det e^A = e^{\text{Tr}A}$.
- $\frac{d}{dx} e^{xA} = A e^{xA}$.
- $e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\dots}$.
- $(e^A)^{-1} = e^{-A}$ (sale de poner $A = B$ en la propiedad $e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\dots}$).
- $(e^A)_{ij} \neq e^{A_{ij}}$ (es obvio, pero uno puede caer en la tentación).

Problema 2

Ítem a

Si $M \in \mathbf{SU}(3)$ entonces

$$\begin{aligned} M^\dagger &= M^{-1} \\ \left(e^{i\epsilon \cdot \frac{\lambda}{2}}\right)^\dagger &= \left(e^{i\epsilon \cdot \frac{\lambda}{2}}\right)^{-1} \\ e^{-i\frac{\lambda^\dagger}{2} \cdot \epsilon} &= e^{-i\epsilon \cdot \frac{\lambda}{2}} \end{aligned}$$

donde he usado las propiedades del box 5. Debido a que e^{matriz} es una función inyectiva entonces la igualdad puede trasladarse a los exponentes

$$\lambda^\dagger \cdot \epsilon = \epsilon \cdot \lambda$$

El hecho de que esta igualdad deba valer $\forall \epsilon \in \mathbb{R}^n$ hace que término a término deba resultar válida. Entonces

$$\lambda_i^\dagger = \lambda_i \quad \Rightarrow \quad \lambda_i \text{ es hermítica}$$

Por otro lado, si $M \in \mathbf{SU}(3)$ entonces

$$\begin{aligned} \det(M) &= 1 \\ \det\left(e^{i\epsilon \cdot \frac{\lambda}{2}}\right) &= \\ e^{\text{Tr}(i\epsilon \cdot \frac{\lambda}{2})} &= \end{aligned}$$

(nuevamente usé una propiedad del box 5) lo cual implica que

$$\begin{aligned} \text{Tr}\left(i\epsilon \cdot \frac{\lambda}{2}\right) &= 0 \\ \frac{i\epsilon}{2} \cdot \text{Tr}(\lambda) &= \leftarrow \text{Tr es una operación lineal} \end{aligned}$$

Nuevamente el hecho de que esto deba ser válido $\forall \epsilon \in \mathbb{R}^n$ hace que

$$\text{Tr}(\lambda_i) = 0$$

Ítem b

Entiendo que tiene que ver con el hecho de que la dimensión de $\mathbf{SU}(3)$ es 8. Entonces $\epsilon \in \mathbb{R}^8$.

Ítem c

Las relaciones de conmutación son

$$[\lambda_i, \lambda_j] = 2if_{ijk}\lambda_k \rightarrow \text{Álgebra su}(3)$$

con f_{ijk} la constante de estructura dada por [Greiner and Müller, 1994, sec. 7.3]

$$\text{Constante de estructura de su}(3) \rightarrow \begin{cases} f_{123} = 1 \\ f_{147} = -f_{156} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = -f_{367} = \frac{1}{2} \\ f_{458} = f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ f_{ijk} = -f_{jik} = -f_{ikj} \text{ etc.} \end{cases}$$

Ítem d

Si $\bar{\Lambda}_i$ es el “operador abstracto que actúa sobre el espacio de Hilbert” que es representado por la matriz λ_i en el espacio en que los quarks son representados por vectorsitos (y por $\bar{\lambda}_i$ en el de los antiquarks) entonces se definen los operadores de subida y bajada de isospín, u-espín y v-espín como

$$\text{Subida y bajada} \rightarrow \begin{cases} \bar{I}_\pm = \frac{\bar{\Lambda}_1 \pm i\bar{\Lambda}_2}{2} \\ \bar{U}_\pm = \frac{\bar{\Lambda}_6 \pm i\bar{\Lambda}_7}{2} \\ \bar{V}_\pm = \frac{\bar{\Lambda}_4 \pm i\bar{\Lambda}_5}{2} \end{cases}$$

y son tales que su acción sobre los quarks uds es la siguiente:

$$\begin{aligned} \left\{ \bar{I}_+ \begin{pmatrix} |u\rangle \\ |d\rangle \\ |s\rangle \end{pmatrix} \right\} &= \begin{pmatrix} 0 \\ |u\rangle \\ 0 \end{pmatrix} & \left\{ \bar{U}_+ \begin{pmatrix} |u\rangle \\ |d\rangle \\ |s\rangle \end{pmatrix} \right\} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ |d\rangle \end{pmatrix} & \left\{ \bar{V}_+ \begin{pmatrix} |u\rangle \\ |d\rangle \\ |s\rangle \end{pmatrix} \right\} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ |u\rangle \end{pmatrix} \\ \left\{ \bar{I}_- \begin{pmatrix} |u\rangle \\ |d\rangle \\ |s\rangle \end{pmatrix} \right\} &= \begin{pmatrix} |d\rangle \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \left\{ \bar{U}_- \begin{pmatrix} |u\rangle \\ |d\rangle \\ |s\rangle \end{pmatrix} \right\} &= \begin{pmatrix} 0 \\ |s\rangle \\ 0 \end{pmatrix} & \left\{ \bar{V}_- \begin{pmatrix} |u\rangle \\ |d\rangle \\ |s\rangle \end{pmatrix} \right\} &= \begin{pmatrix} |s\rangle \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Haciendo las cuentas con las matricitas de la consigna y los vectorsitos

$$|u\rangle \sim \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |d\rangle \sim \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |s\rangle \sim \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

se pueden verificar las relaciones anteriores.

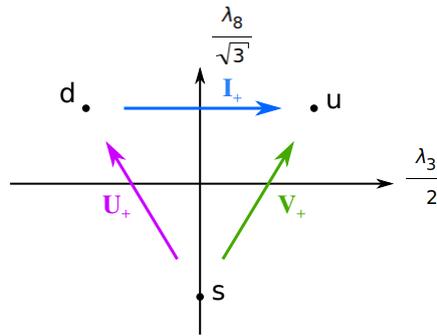
Problema 3

Ítem b

Los autovalores y autovectores de cada una de estas matrices son

$\frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_8$	Autovector	$\frac{1}{2}\lambda_3$	Autovector
$-\frac{2}{3}$	s	$-\frac{1}{2}$	d
$\frac{1}{3}$	u	0	s
	d	$\frac{1}{2}$	u

con lo cual el gráfico es el famoso triangulito:



Problema 4

Ítem a

Cuando se anota

$$2 \otimes 2 \otimes 2 = 2_{MA} \oplus 2_{MS} \oplus 4_S \rightarrow \text{Notación típica}$$

lo que realmente se está indicando es una operación con espacios de Hilbert, creo. Cada símbolo en lo anterior representa lo siguiente:

- $2 \equiv \mathcal{H}_2$ es un espacio de Hilbert típico de dimensión 2 (por ejemplo un sistema de espín $\frac{1}{2}$).
- 2_{MA} es un espacio de Hilbert de dimensión 2 embebido en un espacio de Hilbert de dimensión 8 tal que es antisimétrico ante el intercambio de dos de los elementos del $2 \otimes 2 \otimes 2$.
- 2_{MS} es lo mismo que 2_{MA} pero simétrico.
- 4_S es un espacio de Hilbert de dimensión 4 embebido en un espacio de dimensión 8 que totalmente simétrico ante el intercambio de cualesquiera de los elementos del $2 \otimes 2 \otimes 2$.

En el Greiner figura la siguiente notación para indicar lo mismo [Greiner and Müller, 1994, sec. 8.3]

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}_{MA} \oplus \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}_{MS} \oplus \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}_S \rightarrow \text{Notación del Greiner}$$

haciendo referencia a que $2 \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ representan espacios de partículas de espín $\frac{1}{2}$ y así sucesivamente.

Si el espacio de Hilbert de un quark es

$$2 \equiv \mathcal{H}_2 = \text{gen} \{u, d\} \equiv \text{gen} \{|u\rangle, |d\rangle\}$$

donde u y d representan a los quarks up y $down$ respectivamente, entonces

$$2 \otimes 2 \otimes 2 = \text{gen} \{ \{u, d\} \otimes \{u, d\} \otimes \{u, d\} \}$$

y, de acuerdo vimos en clase,

$$\text{Multipletes} \rightarrow \begin{cases} 2_{MA} = \text{gen} \left\{ \frac{(ud - du)u}{\sqrt{2}}, \frac{(ud - du)d}{\sqrt{2}} \right\} \\ 2_{MS} = \text{gen} \left\{ \frac{(ud + du)u - 2ud}{\sqrt{5}}, \frac{(ud + du)d - 2dd}{\sqrt{5}} \right\} \\ 4_S = \text{gen} \left\{ uuu, \frac{uud + udu + duu}{\sqrt{3}}, \frac{ddu + dud + udd}{\sqrt{3}}, ddd \right\} \end{cases} \rightarrow \text{Isospín } \frac{3}{2}$$

Curiosidad Por qué “priorizamos” a los dos primeros quarks en 2_{MA} y 2_{MS} para que sean mixtos anti simétricos y simétricos? Es decir, hemos elegido

$$2_{MA} = \text{gen} \left\{ \frac{(ud - du)u}{\sqrt{2}}, \frac{(ud - du)d}{\sqrt{2}} \right\}$$

pero por qué no elegimos alguno de los siguientes dos

$$\begin{cases} 2_{MA} = \text{gen} \left\{ \frac{u(ud - du)}{\sqrt{2}}, \frac{d(ud - du)}{\sqrt{2}} \right\} \\ 2_{MA} = \text{gen} \left\{ \frac{uud - duu}{\sqrt{2}}, \frac{udd - ddu}{\sqrt{2}} \right\} \end{cases}$$

Resulta que todo funciona igual. Cuando uno arma el espacio $2 \otimes 2 \otimes 2$ tiene que elegir el orden en que los va a acoplar y siempre trabajar todo en ese orden. Por ejemplo lo que se optó por hacer en este ejercicio fue $(2 \otimes 2) \otimes 2$.

Box 6 - $2 \otimes 2 \otimes 2$: quarks vs espín

En el problema 4)a) se construyeron los multipletes de $2 \otimes 2 \otimes 2$ usando los quarks. Pero se puede hacer lo mismo usando el espín. En realidad no es más que un simple cambio de etiquetas... En particular se tiene que

$$2 = \begin{cases} \text{gen} \{u, d\} & \text{En quarks (isospín)} \\ \text{gen} \left\{ \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \equiv |+\rangle, \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \equiv |-\rangle \right\} & \text{En espín notación } |j, m\rangle \end{cases}$$

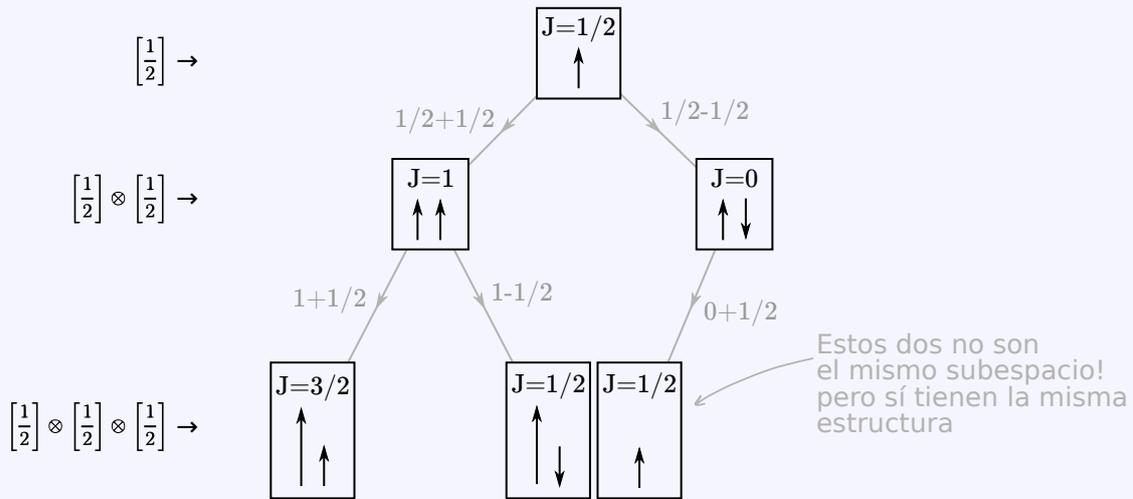
Entonces, usando la notación de Greiner [Greiner and Müller, 1994, sec. 8.3] de espines,

$$\begin{aligned} \text{Notación típica } \rightarrow 2 \otimes 2 \otimes 2 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \leftarrow \text{Notación de Greiner} \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} &= [1] \oplus [0] \rightarrow = ([1] \oplus [0]) \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= [1] \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \oplus [0] \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \left. \begin{aligned} [1] \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ [0] \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \rightarrow = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} &\equiv 4 \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} &\equiv 2 \end{aligned} \right\} \rightarrow = 4 \oplus 2 \oplus 2 \leftarrow \text{Volvemos a notación típica} \end{aligned}$$

y para los espines tenemos que

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \text{gen} \left\{ \left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle, \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle, \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle, \left| \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle \right\} \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \text{gen} \left\{ \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle, \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \right\} \end{cases}$$

A continuación dejo un dibujito adaptado del Greiner [Greiner and Müller, 1994, fig. 8.4] que me pareció ilustrativo de todo este proceso:



Ítem b

Para una partícula/sistema con espín e isospín el estado se podrá escribir como

$$|\psi\rangle = |\text{espín}\rangle |\text{isospín}\rangle \equiv |\text{espín}\rangle \otimes |\text{isospín}\rangle$$

Caso de isospín $\frac{3}{2}$ Si esta partícula está compuesta por 3 quarks y tiene isospín $\frac{3}{2}$ entonces necesariamente

$$|\text{isospín}\rangle \in 4_S = \text{gen} \left\{ uuu, \frac{uud + udu + duu}{\sqrt{3}}, \frac{ddu + dud + udd}{\sqrt{3}}, ddd \right\}$$

ya que es la única manera de obtener un isospín $\frac{3}{2}$ combinando tres quarks. Es decir

$$\left. \begin{array}{l} \text{isospín} = \frac{3}{2} \\ |\text{isospín}\rangle \in 2 \otimes 2 \otimes 2 \end{array} \right\} \iff |\text{isospín}\rangle \in 4_S$$

Como se puede ver cualquier elemento $|\text{isospín}\rangle \in 4_S$ satisface

$$\overline{P_{ij}} |\text{isospín}\rangle = |\text{isospín}\rangle$$

donde $\overline{P_{ij}}$ es el operador de permutación entre los quarks i y j . El hecho de que sea un autoestado con autovalor +1 implica que $|\text{isospín}\rangle$ es completamente simétrico (cosa que ya sabíamos).

Si queremos que la función de onda $|\psi\rangle$ sea simétrica entonces necesariamente

$$\begin{aligned} \overline{P_{ij}} |\psi\rangle &= |\psi\rangle \rightarrow \text{Esto pide la consigna} \\ \left(\overline{P_{ij}} |\text{espín}\rangle \right) \otimes \left(\overline{P_{ij}} |\text{isospín}\rangle \right) &= \overbrace{|\text{espín}\rangle |\text{isospín}\rangle}^{|\psi\rangle} \\ \left(\overline{P_{ij}} |\text{espín}\rangle \right) |\text{isospín}\rangle &= \leftarrow \overline{P_{ij}} |\text{isospín}\rangle = |\text{isospín}\rangle \end{aligned}$$

Se llegó a una relación de la forma $|a\rangle |b\rangle = |c\rangle |b\rangle$. Como esto debe ser válido $\forall |b\rangle \in 4_S$ entonces necesariamente debe ocurrir que $|a\rangle = |c\rangle$, es decir

$$\overline{P_{ij}} |\text{espín}\rangle = |\text{espín}\rangle$$

lo cual implica que $|\text{espín}\rangle$ debe ser totalmente simétrico ante el intercambio de partículas. Debido a que

$$|\text{espín}\rangle \in 2 \otimes 2 \otimes 2$$

porque cada uno de los tres quarks aporta un espín $\frac{1}{2}$ y debido a que $2 \otimes 2 \otimes 2 = 2_{MA} \oplus 2_{MS} \oplus 4_S$ entonces la única opción que queda es que

$$|\text{espín}\rangle \in 4_S = \text{gen} \left\{ \left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle, \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle, \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle, \left| \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle \right\}$$

o bien, en términos de la base desacoplada

$$|\text{espín}\rangle \in 4_S = \text{gen} \left\{ \uparrow\uparrow\uparrow, \frac{\uparrow\uparrow\downarrow + \uparrow\downarrow\uparrow + \downarrow\uparrow\uparrow}{\sqrt{3}}, \frac{\downarrow\downarrow\uparrow + \downarrow\uparrow\downarrow + \uparrow\downarrow\downarrow}{\sqrt{3}}, \downarrow\downarrow\downarrow \right\}$$

donde la notación es $\uparrow\uparrow\uparrow \equiv |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle$ y así para todos los demás (al igual que, por ejemplo, $udu \equiv |u\rangle \otimes |d\rangle \otimes |u\rangle$).

Caso de isospín $\frac{1}{2}$ Para un sistema compuesto por tres quarks con isospín $\frac{1}{2}$ se tiene que

$$\left. \begin{array}{l} \text{isospín} = \frac{3}{2} \\ |\text{isospín}\rangle \in 2 \otimes 2 \otimes 2 \end{array} \right\} \iff |\text{isospín}\rangle \in 2_{MA} \oplus 2_{MS}$$

con 2_{MA} y 2_{MS} dados por las expresiones encontradas en el ítem (a), esto es

$$\left\{ \begin{array}{l} 2_{MA} = \text{gen} \left\{ \frac{(ud - du)u}{\sqrt{2}}, \frac{(ud - du)d}{\sqrt{2}} \right\} \\ 2_{MS} = \text{gen} \left\{ \frac{(ud + du)u - 2ud}{\sqrt{5}}, \frac{(ud + du)d - 2du}{\sqrt{5}} \right\} \end{array} \right.$$

Para que la función de onda sea totalmente simétrica ante el intercambio de cualesquiera dos partículas se requiere que

$$\begin{aligned} \overline{P_{ij}} |\psi\rangle &= |\psi\rangle \rightarrow \text{Totalmente simétrica} \\ \left(\overline{P_{ij}} |\text{espín}\rangle \right) \otimes \left(\overline{P_{ij}} |\text{isospín}\rangle \right) &= |\text{espín}\rangle \otimes |\text{isospín}\rangle \end{aligned}$$

Como esto debe valer $\forall |\text{espín}\rangle, |\text{isospín}\rangle$ entonces debe ocurrir una de dos opciones

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Opción MA} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overline{P_{ij}} |\text{espín}\rangle = -|\text{espín}\rangle \\ \overline{P_{ij}} |\text{isospín}\rangle = -|\text{isospín}\rangle \end{array} \right. \\ \text{Opción MS} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overline{P_{ij}} |\text{espín}\rangle = |\text{espín}\rangle \\ \overline{P_{ij}} |\text{isospín}\rangle = |\text{isospín}\rangle \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Problema 12

Ítem b

Los autovalores y autovectores de estas matrices son

$\frac{1}{\sqrt{3}}\bar{\lambda}_8$		$\frac{1}{2}\bar{\lambda}_3$	
Autovalor	Autovector	Autovalor	Autovector
$\frac{2}{3}$	\bar{s}	$\frac{1}{2}$	\bar{d}
$-\frac{1}{3}$	\bar{u}	0	\bar{s}
	\bar{d}	$-\frac{1}{2}$	\bar{u}

En cuanto a los operadores de subida y bajada su definición es igual que para los quarks, e.g.

$$\overline{I_{\pm}} \equiv \frac{\overline{\Lambda}_1 \pm i\overline{\Lambda}_2}{2}$$

pero la diferencia está en que esta vez habrá que usar la representación antifundamental. Esto quiere decir que cuando se escriban las matricitas para hacer las cuentas las λ serán distintas. En particular

$$\text{Operador abstracto} \rightarrow \overline{I_{\pm}} \sim \left\{ \begin{array}{l} \frac{\lambda_1 \pm i\lambda_2}{2} \rightarrow \text{Representación fundamental (quarks)} \\ \frac{\bar{\lambda}_1 \pm i\bar{\lambda}_2}{2} \rightarrow \text{Representación antifundamental (antiquarks)} \end{array} \right.$$

con

$$\bar{\lambda}_i \equiv -\lambda_i^*$$

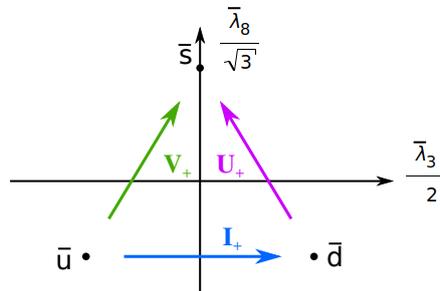
Entonces

$$\begin{aligned}
 \text{Operación abstracta con kets } \rightarrow \left. \begin{array}{l} \overline{I}_+ |u\rangle \\ \overline{I}_+ |\bar{u}\rangle \end{array} \right\} &\equiv \left\{ \begin{array}{l} \frac{\overline{\Lambda}_1 + i\overline{\Lambda}_2}{2} |u\rangle \\ \frac{\overline{\Lambda}_1 + i\overline{\Lambda}_2}{2} |\bar{u}\rangle \end{array} \right\} \leftarrow \text{Aún en representación abstracta} \\
 \text{Paso a representación de matrices } \rightarrow &\sim \left\{ \begin{array}{l} \frac{\lambda_1 + i\lambda_2}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \frac{\bar{\lambda}_1 + i\bar{\lambda}_2}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \right\} \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \right\} \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \right\} \\
 \text{Vuelvo a notación abstracta } \rightarrow &\sim \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ -|\bar{d}\rangle \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

Haciendo las cuentas con las matrices de Gell-Mann se tiene que para los antiquarks vale que

$$\begin{array}{l}
 \left\{ \begin{array}{l} \overline{I}_+ \left\{ \begin{array}{l} |\bar{u}\rangle \\ |\bar{d}\rangle \\ |\bar{s}\rangle \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} -|\bar{d}\rangle \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \overline{I}_- \left\{ \begin{array}{l} |\bar{u}\rangle \\ |\bar{d}\rangle \\ |\bar{s}\rangle \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 0 \\ -|\bar{u}\rangle \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \overline{U}_+ \left\{ \begin{array}{l} |\bar{u}\rangle \\ |\bar{d}\rangle \\ |\bar{s}\rangle \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 0 \\ -|\bar{s}\rangle \\ 0 \end{bmatrix} \\ \overline{U}_- \left\{ \begin{array}{l} |\bar{u}\rangle \\ |\bar{d}\rangle \\ |\bar{s}\rangle \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -|\bar{d}\rangle \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \overline{V}_+ \left\{ \begin{array}{l} |\bar{u}\rangle \\ |\bar{d}\rangle \\ |\bar{s}\rangle \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} -|\bar{s}\rangle \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \overline{V}_- \left\{ \begin{array}{l} |\bar{u}\rangle \\ |\bar{d}\rangle \\ |\bar{s}\rangle \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -|\bar{u}\rangle \end{bmatrix} \end{array} \right.
 \end{array}$$

A nivel de dibujitos esto será



Problema 13

Ítem a

Primero que nada, el mesón $\bar{u}u$ se expresa en notación de kets según

$$|\bar{u}u\rangle = |\bar{u}\rangle \otimes |u\rangle$$

En cuanto al operador \overline{I}_- , tenemos que distinguir entre dos operadores:

$$\text{Son distintos!} \rightarrow \begin{cases} \overline{I}_-^{3 \otimes 3} & \rightarrow \text{Operador de bajada en el espacio de los mesones} \\ \overline{I}_-^3 & \rightarrow \text{Operador de bajada en el espacio de los quarks} \\ \overline{I}_-^3 = \overline{I}_-^{\overline{3}} & \rightarrow \text{Operador de bajada en espacio de antiquarks} \end{cases}$$

Normalmente estos dos operadores son indicados como \overline{I}_- sin distinción alguna, pero uno debe tener presente que no son iguales. Quizá esto sea obvio y trivial. O quizá no. El operador en el espacio de mesones es

$$\overline{I}_-^{3 \times 3} \equiv \overline{I}_-^3 \otimes \underline{\mathbb{1}}^3 + \overline{\mathbb{1}}^3 \otimes \overline{I}_-^3$$

del mismo modo que para cualquier operador que actúe sobre un espacio producto (por ejemplo el espín total $\overline{S} = \overline{S}_1 + \overline{S}_2 \equiv \overline{S}_1 \otimes \underline{\mathbb{1}} + \underline{\mathbb{1}} \otimes \overline{S}_2$). Se puede llegar a esta expresión considerando también la definición de \overline{I}_- y expandir los operadores de Gell-Mann:

$$\begin{aligned} \text{Operador en } \text{SU}(3) \otimes \text{SU}(3) \rightarrow \overline{I}_- &= \frac{\overline{\Lambda}_1 - i \overline{\Lambda}_2}{2} \leftarrow \text{Definición de } \overline{I}_- \\ \overline{\Lambda}_i^{3 \otimes 3} = \overline{\Lambda}_i^3 \otimes \underline{\mathbb{1}}^3 + \overline{\mathbb{1}}^3 \otimes \overline{\Lambda}_i^3 \rightarrow &= \frac{(\overline{\Lambda}_1 \otimes \underline{\mathbb{1}} + \underline{\mathbb{1}} \otimes \overline{\Lambda}_1) - i(\overline{\Lambda}_2 \otimes \underline{\mathbb{1}} + \underline{\mathbb{1}} \otimes \overline{\Lambda}_2)}{2} \\ &= \frac{(\overline{\Lambda}_1 - i \overline{\Lambda}_2) \otimes \underline{\mathbb{1}} + \underline{\mathbb{1}} \otimes (\overline{\Lambda}_1 - i \overline{\Lambda}_2)}{2} \\ &= \overline{I}_- \otimes \underline{\mathbb{1}} + \underline{\mathbb{1}} \otimes \overline{I}_- \leftarrow \text{Operadores en } \text{SU}(3) \end{aligned}$$

Finalmente la “trivial” cuentita:

$$\begin{aligned} \overline{I}_- |\bar{u}u\rangle &= (\overline{I}_- |\bar{u}\rangle) \otimes |u\rangle + |\bar{u}\rangle \otimes (\overline{I}_- |u\rangle) \\ \left. \begin{aligned} \overline{I}_- |\bar{u}\rangle &= 0 \\ \overline{I}_- |u\rangle &= |d\rangle \end{aligned} \right\} \rightarrow &= |\bar{u}\rangle |d\rangle \checkmark \end{aligned}$$

Ítem c

Una función de onda $|\psi\rangle$ será un singlete sólo si es la única de su multiplete. Esto quiere decir que la aplicación de cualesquiera de los operadores de subida y bajada debería aniquilarla. Es decir

$$|\psi\rangle \in \text{a un singlete} \iff \begin{cases} \overline{I}_\pm |\psi\rangle = 0 \\ \overline{U}_\pm |\psi\rangle = 0 \\ \overline{V}_\pm |\psi\rangle = 0 \end{cases}$$

Para el isospín la cuenta es

$$\begin{aligned} \overline{I}_\pm |\psi\rangle &= (\overline{I}_\pm \otimes \underline{\mathbb{1}} + \underline{\mathbb{1}} \otimes \overline{I}_\pm) (|\bar{u}\rangle |u\rangle + |\bar{d}\rangle |d\rangle + |\bar{s}\rangle |s\rangle) \\ \left. \begin{aligned} \overline{I}_\pm |s\rangle &\equiv 0 \\ \overline{I}_\pm |\bar{s}\rangle &\equiv 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow &= (\overline{I}_\pm |\bar{u}\rangle) |u\rangle + |\bar{u}\rangle (\overline{I}_\pm |u\rangle) + (\overline{I}_\pm |\bar{d}\rangle) |d\rangle + |\bar{d}\rangle (\overline{I}_\pm |d\rangle) \\ &= \begin{cases} -|\bar{d}\rangle |u\rangle + |\bar{d}\rangle |u\rangle & \text{Para } \overline{I}_+ \\ |\bar{u}\rangle |d\rangle - |\bar{u}\rangle |d\rangle & \text{Para } \overline{I}_- \end{cases} \\ &\equiv 0 \end{aligned}$$

Para los operadores \overline{V}_\pm y \overline{U}_\pm supongo que debe pasar lo mismo, por simetría.

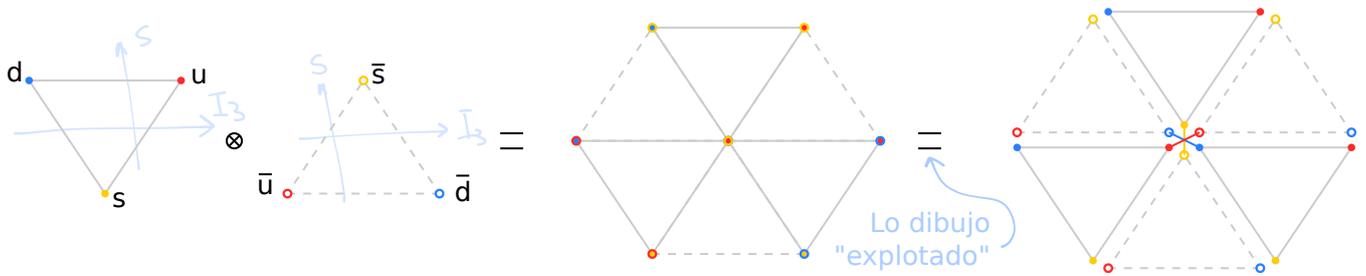
Problema 14

Ítem a (octete mesónico)

El producto tensorial $3 \otimes \overline{3}$ es

$$\{u, d, s\} \otimes \{\bar{u}, \bar{d}, \bar{s}\} = \{u\bar{u}, u\bar{d}, u\bar{s}, d\bar{u}, d\bar{d}, d\bar{s}, s\bar{u}, s\bar{d}, s\bar{s}\}$$

y estos son los 9 estados del $3 \otimes \overline{3}$. En forma gráfica esto se puede representar de la siguiente manera:



Ahora hay que encontrar los estados de $8 \oplus 1$. Para ello se puede proceder aplicando los operadores de subida y bajada a todos los estados del $3 \otimes \bar{3}$. Para los dos primeros esto es

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{I_{\pm}} \\ \overline{U_{\pm}} \\ \overline{V_{\pm}} \end{array} \right\} |u\bar{u}\rangle = \begin{cases} -|u\bar{d}\rangle & \text{Para } \overline{I_+} \\ |d\bar{u}\rangle & \text{Para } \overline{I_-} \\ -|u\bar{s}\rangle & \text{Para } \overline{V_+} \\ |s\bar{u}\rangle & \text{Para } \overline{V_-} \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} \overline{I_{\pm}} \\ \overline{U_{\pm}} \\ \overline{V_{\pm}} \end{array} \right\} |u\bar{d}\rangle = \begin{cases} |d\bar{d}\rangle - |u\bar{u}\rangle & \text{Para } \overline{I_-} \\ -|u\bar{s}\rangle & \text{Para } \overline{U_+} \\ |s\bar{d}\rangle & \text{Para } \overline{V_-} \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

y lo mismo sería para todos los demás. A nivel gráfico lo que está ocurriendo en cada uno de estos dos casos es lo siguiente:



Entonces, tomando un único elemento del $3 \otimes \bar{3}$ y aplicándole en forma sucesiva todos los operadores de subida y bajada se obtiene el siguiente conjunto de 9 elementos

$$\{u\bar{d}, u\bar{s}, d\bar{s}, d\bar{u}, s\bar{u}, s\bar{d}, d\bar{d} - u\bar{u}, s\bar{s} - u\bar{u}, s\bar{s} - d\bar{d}\}$$

de los cuales sólo 8 son linealmente independientes. (Los primeros 6 son independientes con todo mientras que los últimos 3 tienen una dependencia lineal. Por ejemplo $[d\bar{d} - u\bar{u}] - [s\bar{s} - u\bar{u}] = -s\bar{s} + d\bar{d}$.) Entonces hemos encontrado 8 estados independientes tales que el 8 de $8 \oplus 1$ es

$$8 = \text{gen} \{u\bar{d}, u\bar{s}, d\bar{s}, d\bar{u}, s\bar{u}, s\bar{d}, d\bar{d} - u\bar{u}, s\bar{s} - u\bar{u}\} \rightarrow \text{No es la convención histórica pero vale}$$

Lo anterior es una posible base para 8. Sin embargo históricamente (por motivos que ahora son irrelevantes) se usó al estado

$$\pi^0 = \frac{u\bar{u} - d\bar{d}}{\sqrt{2}}$$

como uno de los elementos de la base, y para el otro elemento formado por combinación lineal se utilizó el η_8 que satisface ser ortogonal a π^0 . Para encontrar quién es η_8 se propone lo siguiente

$$\eta_8 = \alpha (d\bar{d} - u\bar{u}) + \beta (s\bar{s} - u\bar{u})$$

y se pide que sea ortogonal a π_0 , es decir

$$\begin{aligned} \langle \pi_0 | \eta_8 \rangle &= 0 \\ \frac{-2\alpha - \beta}{\sqrt{2}} &= \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\eta_8 = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} (d\bar{d} + u\bar{u} - 2s\bar{s})$$

Ahora se puede elegir $\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ para que quede normalizado. Utilizando esta “convención de base” entonces

$$8 = \text{gen} \{u\bar{d}, u\bar{s}, d\bar{s}, d\bar{u}, s\bar{u}, s\bar{d}, \pi^0, \eta_8\} \rightarrow \text{Convención histórica}$$

Ítem b (singlete mesónico)

En cuanto al singlete 1, me parece que la característica es que se trata de un estado que es aniquilado por todos los operadores de subida y de bajada. También se lo puede pensar como un estado ortogonal a todos los de 8.

En el problema anterior se encontró que $u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}$ satisface esto. Entonces concluyo que

$$1 = \text{gen} \{u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}\}$$

y así queda completada la descomposición de $3 \otimes \bar{3}$ en $8 \oplus 1$.

Guía 5 - Ecuaciones de onda relativistas: Dirac y Klein-Gordon

Esta guía tiene algunos temas en común con los temas de la materia Teoría Cuántica de Campos que cursó Alf en el primer cuatrimestre de 2018. En [este link](#) se encuentran sus apuntes y guías resueltas. En particular en la [hoja de fórmulas de QFT](#) puede haber bastante material útil.

Problema 1

Ítem a

Para encontrar la relación de dispersión basta con reemplazar la solución en la ecuación de Klein-Gordon. Esto es

$$\begin{aligned} (\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \phi &= (\partial^\mu \partial_\mu + m^2) e^{\pm i k x} \\ &= (-k^\mu k_\mu + m^2) e^{\pm i k x} \end{aligned}$$

y como esta cantidad debe ser nula entonces

$$k^\mu k_\mu = m^2$$

Usando que $k^\mu \sim \begin{bmatrix} \omega \\ \mathbf{p} \end{bmatrix}$ entonces la ecuación anterior se puede desarrollar y queda que

$$\omega = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \rightarrow \text{Rel. de disp. K-G}$$

Ítem b

Para encontrar los autovalores simplemente se aplica el operador a las soluciones

$$i\partial_\mu e^{\pm i k x} = \mp k_\mu e^{\pm i k x}$$

Entonces el momento de la onda $\phi = e^{\pm i k x}$ es

$$p^\mu \sim \pm \begin{bmatrix} -\omega \\ \mathbf{k} \end{bmatrix}$$

Para que la energía sea positiva y todo cierre bien creo que la cosa sería así:

Solución	“Signo de energía”	Autovalor de $i\partial_\mu (\sim p_\mu)$	Cuadrimomento $p^\mu = k^\mu$	Valor de ω	Energía $E = p^0$
$e^{+i k x}$	Negativo	$\begin{bmatrix} -\omega \\ -\mathbf{k} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\omega \\ \mathbf{k} \end{bmatrix}$	$\omega = E $	$E = -\omega$
$e^{-i k x}$	Positivo	$\begin{bmatrix} \omega \\ -\mathbf{k} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \omega \\ \mathbf{k} \end{bmatrix}$	$\omega = E $	$E = \omega$

Sobre el signo de la energía En lo anterior parece que las soluciones de energía negativa tienen, en efecto, energía negativa. El problema es que como ϕ no puede interpretarse como función de onda, entonces no existe un “ket ϕ ” tal que $\mathcal{H} |\phi\rangle = E |\phi\rangle$. Eso no funciona. Esto es un tema que se ve en Teoría Cuántica de Campos (quizá más adelante en E4 también se vea, no lo sé). La cuestión es que ϕ no es una función de onda en el espacio de Hilbert sino un operador sobre el espacio de Hilbert. Y el hamiltoniano de Klein-Gordon resulta ser

$$\overline{\mathcal{H}_{\text{Klein-Gordon}}} = \overline{p^0} = \int \left((\partial^0 \overline{\phi}^\dagger)^2 + |\nabla \overline{\phi}|^2 + m^2 \overline{\phi}^2 \right) d^3x \rightarrow \text{Se ve en QFT}$$

Entonces $\langle E \rangle = \langle \text{estado} | \overline{\mathcal{H}_{\text{Klein-Gordon}}} | \text{estado} \rangle \geq 0$ con $|\text{estado}\rangle \neq |\phi\rangle$ sino una cosa más abstracta todavía.

Ítem c

La ecuación de Schrödinger es $\overline{\mathcal{H}} |\psi\rangle = E |\psi\rangle$. Para una partícula libre $\overline{\mathcal{H}} = \frac{\overline{p}^2}{2m}$ y, en la representación de coordenadas, esto es $\overline{\mathcal{H}} \sim \frac{-1}{2m} \nabla^2$. Entonces

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{H}} |\phi\rangle &\sim -\frac{1}{2m} \nabla^2 \phi \\ &= -\frac{1}{2m} \nabla^2 e^{\pm i k x} \\ &= -\frac{1}{2m} \nabla^2 e^{\pm i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \\ &= \pm \frac{\mathbf{k}^2}{2m} e^{\pm i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \\ &\sim \pm \frac{\mathbf{k}^2}{2m} |\phi\rangle \end{aligned}$$

Problema 3

Ítem b

Una solución en reposo tiene $\mathbf{p} = 0$. Esto quiere decir que

$$\overline{p}^\mu |\psi\rangle \sim i \partial^\mu \psi = \begin{cases} i \partial^0 \psi & \text{cuando } \mu = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y por lo tanto la ecuación de Dirac es simplemente

$$(i \gamma^0 \partial_0 - m) \psi = 0$$

Si se reemplaza $\gamma^0 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix}$ (representación de Dirac) se obtienen las ecuaciones para cada una de las componentes del espinor ψ , que son

$$\text{Componentes de Dirac} \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \psi_1}{\partial t} + im \psi_1 = 0 \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial t} + im \psi_2 = 0 \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial t} - im \psi_3 = 0 \\ \frac{\partial \psi_4}{\partial t} - im \psi_4 = 0 \end{cases}$$

Las soluciones son

$$\begin{cases} \psi_1 = a e^{-imt} \\ \psi_2 = b e^{-imt} \\ \psi_3 = c e^{imt} \\ \psi_4 = d e^{imt} \end{cases}$$

con a, b, c, d constantes.

Para ver cuáles tienen energía positiva y cuáles energía negativa se puede aplicar el hamiltoniano de Dirac $\overline{\mathcal{H}}_{\text{Dirac libre}} = \gamma^0 m + \gamma^0 \gamma^i \overline{p}_i$. Lo que se obtiene es

$$\overline{\mathcal{H}}_{\text{Dirac libre}} |\psi\rangle \sim (\gamma^0 m + i \gamma^0 \gamma^i \partial_i) \begin{bmatrix} e^{-imt} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \\ e^{imt} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \\ & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \rightarrow = m \begin{bmatrix} e^{-imt} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \\ -e^{imt} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

y entonces e^{imt} tiene energía $E = m$ y e^{-imt} tiene energía $E = -m$. Otra forma de ver cuáles son las de energía positiva y cuáles negativa sería considerar $\overline{\mathcal{H}} \sim i \partial_0 \equiv i \frac{\partial}{\partial x^0}$. Es trivial ver que se obtiene el mismo resultado.

Ítem c

La ecuación de continuidad es

$$\begin{aligned} \partial_\mu J^\mu &= \partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) \\ &= (\partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu) \psi + \bar{\psi} (\gamma^\mu \partial_\mu \psi) \\ \left. \begin{aligned} \text{Eq. de Dirac} &\rightarrow (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0 \\ \text{Eq. adjunta} &\rightarrow \bar{\psi} (\overleftarrow{\partial}_\mu \gamma^\mu + m) = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow &= (im\bar{\psi}) \psi + \bar{\psi} (-im\psi) \\ &\equiv 0 \end{aligned}$$

donde se usó que $\bar{\psi}$ satisface la ecuación adjunta.

Problema 5

Para saber cuáles de las u_i y v_i (del problema 4) tienen energía positiva, uso

$$\overline{\mathcal{H}} |\psi\rangle = E |\psi\rangle$$

y reemplazo $\overline{\mathcal{H}}$ por el hamiltoniano de Dirac de la partícula libre, i.e. $\overline{\mathcal{H}}_{\text{Dirac libre}} = \gamma^0 m + \gamma^0 \gamma^i \underline{p}_i$. Para las u_i esto es

$$\overline{\mathcal{H}} |u_i\rangle = (\gamma^0 m + \gamma^0 \gamma^i \underline{p}_i) |e^{-ikx}\rangle \begin{bmatrix} \xi_i \\ \frac{\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{\omega+m} \xi_i \end{bmatrix} \leftarrow \begin{cases} \xi_1 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \xi_2 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \underline{p}_i &\sim -i\partial^i \rightarrow \sim (\gamma^0 m + i\gamma^0 \gamma^i \partial_i) e^{-ikx} \begin{bmatrix} \xi_i \\ \frac{\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{\omega+m} \xi_i \end{bmatrix} \\ &= (\gamma^0 m + \gamma^0 \gamma^i k_i) e^{-ikx} \begin{bmatrix} \xi_i \\ \frac{\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{\omega+m} \xi_i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Vuelvo a rep. de kets} \rightarrow \sim (\gamma^0 m + \gamma^0 \gamma^i k_i) |e^{-ikx}\rangle \begin{bmatrix} \xi_i \\ \frac{\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{\omega+m} \xi_i \end{bmatrix}$$

Por isotropía del espacio el resultado debería ser independiente de la dirección de movimiento. Entonces elijo que la partícula se esté moviendo en dirección z con lo cual

$$\begin{cases} \gamma^i k_i = \gamma^3 k_3 \\ \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma} = k^3 \sigma_3 \end{cases}$$

y entonces

$$\overline{\mathcal{H}} |u_1\rangle = (\gamma^0 m + \gamma^0 \gamma^3 k_3) \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \frac{k^3 \sigma_3}{\omega+m} \xi_1 \end{bmatrix} |e^{-ikx}\rangle$$

$$\left. \begin{aligned} \gamma^0 &= \begin{bmatrix} \mathbb{1}_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_{2 \times 2} \end{bmatrix} \\ \gamma^3 &= \begin{bmatrix} 0 & \sigma_3 \\ -\sigma_3 & 0 \end{bmatrix} \\ \gamma^0 \gamma^3 &= \begin{bmatrix} 0 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{bmatrix} \\ \sigma_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ \xi_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \rightarrow = \begin{bmatrix} m & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & m & 0 & k_3 \\ k_3 & 0 & -m & 0 \\ 0 & k_3 & 0 & -m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{k^3}{\omega+m} \\ 0 \end{bmatrix} |e^{-ikx}\rangle \\ = \begin{bmatrix} m + \frac{k^3 k_3}{\omega+m} \\ 0 \\ k_3 - \frac{mk^3}{\omega+m} \\ 0 \end{bmatrix} |e^{-ikx}\rangle \\ \neq E |u_1\rangle$$

Parece que no tienen una energía bien definida... O hice mal las cuentas. O estoy pensando fuera del tarro.

After consult to docent Lo consulté en la clase de consultas y supuestamente debería funcionar lo que yo hice, aunque no sé por qué no me da. Sin embargo también debería funcionar el hecho de que $\mathcal{H} \sim i \frac{\partial}{\partial x^0}$, que sale de la ecuación de Schrödinger. En este caso las cuentas son triviales y se tiene que

$$\begin{cases} \mathcal{H} u_i = i \frac{\partial u_i}{\partial x^0} = k_0 u_i \\ \mathcal{H} v_i = i \frac{\partial v_i}{\partial x^0} = -k_0 v_i \end{cases}$$

por lo tanto se concluye que, como $k^0 (= k_0)$ se define ≥ 0 entonces

$$\begin{cases} u_i \text{ tienen } E \text{ positiva} \\ v_i \text{ tienen } E \text{ negativa} \end{cases}$$

Problema 6

Ítem a

La ecuación de Schrödinger es

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} - \overline{\mathcal{H}} \right) |\psi\rangle = 0 \rightarrow \text{Schrödinger}$$

y es la que, a mi entender, gobierna la “cuántica relativista” que estamos viendo. (La posta me parece que es QFT en la que ψ no es un ket sino uno operador. Pero acá ψ es un ket, así que tenemos que usar la ecuación de Schrödinger.) Reemplazando el hamiltoniano de Dirac para una partícula libre

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{H}_{\text{Dirac libre}}} &= \beta m + \alpha_i \underline{p}_i \leftarrow \text{Propusimos esto ad hoc en clase} \\ \left. \begin{array}{l} \gamma^0 \stackrel{\text{def}}{=} \beta \\ \gamma^i \stackrel{\text{def}}{=} \beta \alpha_i \\ \beta^2 = \mathbf{1} \end{array} \right\} \rightarrow &\equiv \gamma^0 m + \gamma^0 \gamma^i \underline{p}_i \end{aligned}$$

en la ecuación de Schrödinger se encuentra que

$$\begin{aligned} \left(i \frac{\partial}{\partial t} - \overline{\mathcal{H}_{\text{Dirac libre}}} \right) |\psi\rangle &= 0 \\ \left(i \frac{\partial}{\partial t} - \gamma^0 m - \gamma^0 \gamma^i \underline{p}_i \right) |\psi\rangle &= \\ (i\partial_0 - i\gamma^0 \gamma^i \partial_i - \gamma^0 m) \psi &\sim \leftarrow \underline{p}_i \sim i\partial_i \text{ en rep. de coord.} \\ (i\gamma^0 \partial_0 - i\gamma^i \partial_i - m) \psi &= \leftarrow (\gamma^0)^2 = \mathbf{1} \end{aligned}$$

y, considerando el hecho de que $\gamma^0 \partial_0 - \gamma^i \partial_i \equiv \gamma^\mu \partial_\mu$, finalmente se obtiene la ecuación de Dirac

$$\text{Ecuación de Dirac} \rightarrow \begin{cases} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0 & \rightarrow \text{En representación de coordenadas} \\ (\gamma^\mu \underline{p}_\mu - m) |\psi\rangle = 0 & \rightarrow \text{¿En representación de kets? ¿Existe esto?} \end{cases}$$

En conclusión el hamiltoniano de Dirac que permite escribir a la ecuación de Dirac como una ecuación de Schrödinger es

$$\overline{\mathcal{H}_{\text{Dirac libre}}} = \gamma^0 m + \gamma^0 \gamma^i \underline{p}_i$$

Ítem b

Para el impulso angular orbital esto es

$$\begin{aligned}
 [\mathcal{H}_{\text{Dirac libre}}, \underline{L}] &= [\gamma^0 m + \gamma^0 \gamma^\ell \underline{p}_\ell, \underline{L}] \\
 &= \gamma^0 m \underbrace{[\underline{1}, \underline{L}]}_{=0} + \gamma^0 \gamma^\ell [\underline{p}_\ell, \underline{L}] \\
 L^k = \varepsilon^{ijk} x_i p_j \rightarrow &= \gamma^0 \gamma^\ell \varepsilon^{ijk} [\underline{p}_\ell, \underline{x}_i \underline{p}_j] \\
 [a, bc] = [a, b]c + b[a, c] \rightarrow &= \gamma^0 \gamma^\ell \varepsilon^{ijk} \left([\underline{p}_\ell, \underline{x}_i] \underline{p}_j + \underline{x}_i [\underline{p}_\ell, \underline{p}_j] \right) \\
 [\underline{x}_i, \underline{p}_j] = i\delta_{ij} \rightarrow &= -i\gamma^0 \gamma^\ell \varepsilon^{ijk} \delta_{\ell i} \underline{p}_j \\
 &= -i\gamma^0 \gamma^i \varepsilon^{ijk} \underline{p}_j \\
 &= -i\gamma^0 \gamma \times \underline{p} \\
 &\neq 0
 \end{aligned}$$

Box 7 - Los distintos espacios en los que trabajamos con Dirac

Warning: lo que está en este box puede ser cualquier verdura.

Al trabajar con un espinor ψ que es solución de la ecuación de Dirac, da la impresión de que hay tres espacios distintos involucrados:

- Uno es el espacio de los espinores tal que

$$\Psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_3 \end{bmatrix} \in \text{Espacio de espinores}$$

y las γ^μ son operadores sobre este espacio de espinores. La matriz de transformación $S(\Lambda)$ también es un operador sobre el espacio de espinores. **¿Forma un espacio de Hilbert este espacio de espinores? ¿Es el espacio de Hilbert de espín? Da la impresión de que $\Psi \in \mathcal{H}_{\text{espín } \frac{1}{2}} \otimes \mathcal{H}_{\text{espín } \frac{1}{2}}$ o algo similar... Pero no me termina de cerrar esta idea.**

- Por otro lado está el espacio de Minkowski en el que viven los cuadvectores

$$p^\mu, x^\mu, \text{etc} \in \text{Espacio de cuadvectores}$$

y sobre este espacio los operadores que actúan son las Λ^μ_ν (boosts y rotaciones).

- Por último está el espacio de Hilbert (o los espacios de Hilbert, no sé cuántos son) en el que viven las componentes de los espinores, es decir

$$\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4 \in \mathcal{H}$$

Los operadores que actúan sobre este espacio \mathcal{H} son los mismos de Teórica 2, por ejemplo \underline{p}^i que en representación de coordenadas es $i\partial^i$.

Entonces una “notación correcta” para un espinor sería, creo, algo así

$$\Psi = \begin{bmatrix} |\psi_1\rangle \\ |\psi_2\rangle \\ |\psi_3\rangle \\ |\psi_4\rangle \end{bmatrix}$$

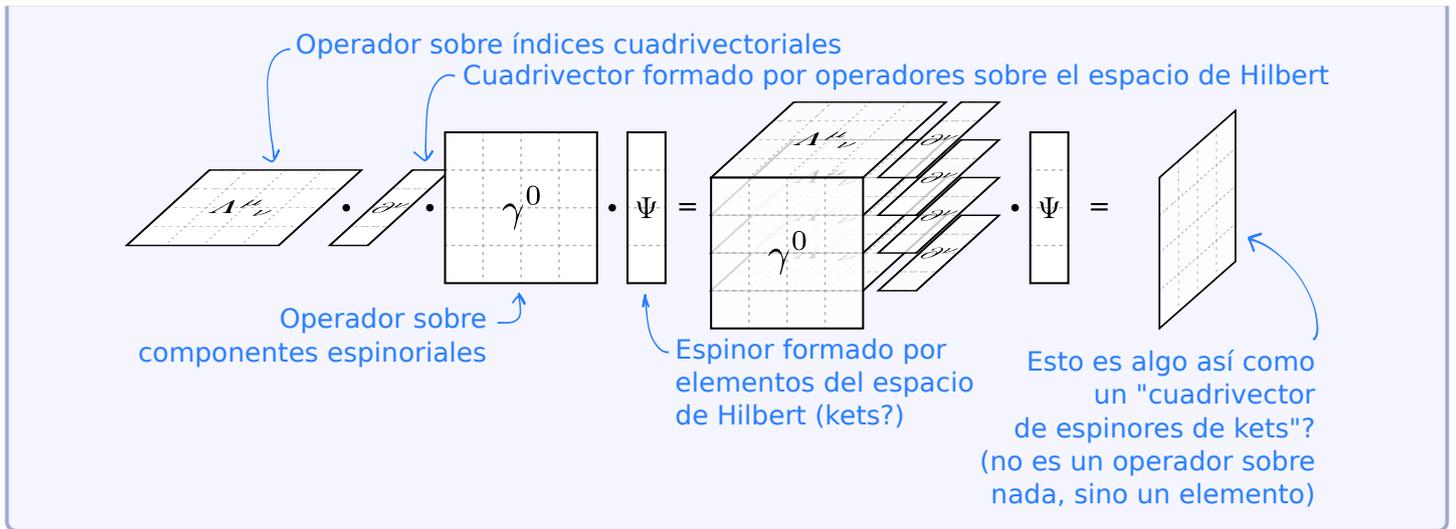
de modo tal que

$$\Lambda^\mu_\nu \underline{p}^\nu \gamma^0 \Psi \rightarrow \text{Los tres espacios!}$$

sería algo así como una operación que involucra actuar sobre los tres espacios. La forma de hacerla es algo así

$$\Lambda^\mu_\nu \underline{p}^\nu \gamma^0 \Psi \sim i\Lambda^\mu_\nu \partial^\nu \gamma^0 \Psi = i\gamma^0 \begin{bmatrix} \Lambda^\mu_\nu \partial^\nu \psi_1 \\ \Lambda^\mu_\nu \partial^\nu \psi_2 \\ \Lambda^\mu_\nu \partial^\nu \psi_3 \\ \Lambda^\mu_\nu \partial^\nu \psi_4 \end{bmatrix}$$

y en forma pictórica creo que se podría representar del siguiente modo



Para el impulso angular total $\bar{\mathbf{J}} = \bar{\mathbf{L}} + \bar{\mathbf{S}}$ esto es

$$[\overline{\mathcal{H}_{\text{Dirac libre}}}, \bar{\mathbf{J}}] = \underbrace{[\overline{\mathcal{H}_{\text{Dirac libre}}}, \bar{\mathbf{L}}_k]}_{\text{Ya lo calculé}} + [\overline{\mathcal{H}_{\text{Dirac libre}}}, \bar{\mathbf{S}}_k]$$

El conmutador con $\bar{\mathbf{L}}_k$ ya lo sé, hago el cálculo con $\bar{\mathbf{S}}_k$. Este es

$$2 [\overline{\mathcal{H}_{\text{Dirac libre}}}, \bar{\mathbf{S}}_k] = m [\gamma^0, \Sigma_k] + i\partial_i [\gamma^0 \gamma^i, \Sigma_k]$$

A partir de acá creo que no queda otra más que escribir las expresiones de γ^μ y Σ y hacer las cuentas. Para el primer conmutador esto es

$$\begin{aligned} [\gamma^0, \Sigma_k] &= \begin{bmatrix} \mathbb{1} & \\ & -\mathbb{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_k & \\ & \sigma_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma_k & \\ & \sigma_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{1} & \\ & -\mathbb{1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_k & \\ & -\sigma_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma_k & \\ & -\sigma_0 \end{bmatrix} \\ &= 0 \end{aligned}$$

y para el segundo

$$\begin{aligned} [\gamma^0 \gamma^i, \Sigma_j] &= \begin{bmatrix} & \sigma_i \\ \sigma_i & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_j & \\ & \sigma_j \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma_j & \\ & \sigma_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & \sigma_i \\ \sigma_i & \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} & \sigma_i \sigma_j \\ \sigma_i \sigma_j & \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma_j \sigma_i & \\ & \sigma_j \sigma_i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & [\sigma_i, \sigma_j] \\ [\sigma_i, \sigma_j] & 0 \end{bmatrix} \\ &= 2i\varepsilon_{ijk} \begin{bmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{bmatrix} \\ &= 2i\varepsilon_{ijk} \gamma^0 \gamma^k \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} 2 [\overline{\mathcal{H}_{\text{Dirac libre}}}, \bar{\mathbf{S}}_k] &= m [\cancel{\gamma^0, \Sigma_k}] + i\partial_i \overbrace{[\gamma^0 \gamma^i, \Sigma_k]}^{2i\varepsilon_{ijk} \gamma^0 \gamma^k} \\ &= -2\partial_i \varepsilon_{ijk} \gamma^0 \gamma^k \\ &= 2\gamma^0 \boldsymbol{\partial} \times \boldsymbol{\gamma} \\ &\sim 2\gamma^0 \bar{\mathbf{p}} \times \boldsymbol{\gamma} \end{aligned}$$

Juntando todo

$$\begin{aligned} [\overline{\mathcal{H}_{\text{Dirac libre}}}, \bar{\mathbf{J}}] &= [\overline{\mathcal{H}_{\text{Dirac libre}}}, \bar{\mathbf{L}}] + [\overline{\mathcal{H}_{\text{Dirac libre}}}, \bar{\mathbf{S}}] \\ &= -i\gamma^0 \boldsymbol{\gamma} \times \bar{\mathbf{p}} + \gamma^0 \bar{\mathbf{p}} \times \bar{\boldsymbol{\gamma}} \\ &\equiv 0 \checkmark \end{aligned}$$

Ítem c

Para que satisfaga el álgebra de impulsos angulares tiene que ocurrir que $[\underline{S}_i, \underline{S}_j] = i\varepsilon_{ijk} \underline{S}_k$. Para verificarlo se puede simplemente hacer la cuenta:

$$\begin{aligned} 4 [\underline{S}_i, \underline{S}_j] &= [\Sigma_i, \Sigma_j] \\ &= \left[\begin{bmatrix} \sigma_i & \\ & \sigma_i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_j & \\ & \sigma_j \end{bmatrix} \right] \\ &= \begin{bmatrix} [\sigma_i, \sigma_j] & \\ & [\sigma_i, \sigma_j] \end{bmatrix} \\ &= 2i\varepsilon_{ijk} \begin{bmatrix} \sigma_k & \\ & \sigma_k \end{bmatrix} \\ &= 2i\varepsilon_{ijk} \Sigma_k \\ &= 4i\varepsilon_{ijk} \underline{S}_k \end{aligned}$$

```
(%i6) S1: matrix([0,1,0,0],[1,0,0,0],[0,0,0,1],[0,0,1,0])/2$
S2: matrix([0,-%i,0,0],[%i,0,0,0],[0,0,0,-%i],[0,0,%i,0])/2$
S3: matrix([1,0,0,0],[0,-1,0,0],[0,0,1,0],[0,0,0,-1])/2$
eigenvalues(S1);
eigenvalues(S2);
eigenvalues(S3);
```

```
(%o4) [[-1/2, 1/2], [2, 2]]
```

```
(%o5) [[-1/2, 1/2], [2, 2]]
```

```
(%o6) [[-1/2, 1/2], [2, 2]] Multiplicidad
```

Problema 8

Ítems a y b

Los parámetros $\omega_{\alpha\beta}$ pueden expresarse como una matriz del siguiente modo

$$\omega_{\alpha\beta} \sim \begin{bmatrix} 0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ -\xi_1 & 0 & \theta_3 & \theta_2 \\ -\xi_2 & -\theta_3 & 0 & \theta_1 \\ -\xi_3 & -\theta_2 & -\theta_1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$$

donde ξ_i parametrizan los boosts en cada una de las direcciones del espacio y θ_i las rotaciones. Los generadores son

$$\begin{aligned} \text{Generadores} &= -\frac{i}{2} \omega_{\alpha\beta} \Sigma^{\alpha\beta} \\ \left. \begin{aligned} \Sigma^{\alpha\beta} &= \frac{i}{4} [\gamma^\alpha, \gamma^\beta] \rightarrow \\ \left. \begin{aligned} \omega_{ij} &= -\omega_{ji} \\ [\gamma^i, \gamma^j] &= -[\gamma^j, \gamma^i] \end{aligned} \right\} \rightarrow \end{aligned} \right\} &= \frac{1}{8} \omega_{\alpha\beta} [\gamma^\alpha, \gamma^\beta] \\ &= \frac{2}{8} \sum_{\alpha=0}^4 \sum_{\beta=\alpha}^4 \omega_{\alpha\beta} [\gamma^\alpha, \gamma^\beta] \\ &= \frac{1}{4} (\xi_1 [\gamma^0, \gamma^1] + \xi_2 [\gamma^0, \gamma^2] + \xi_3 [\gamma^0, \gamma^3] + \theta_1 [\gamma^2, \gamma^3] + \theta_2 [\gamma^1, \gamma^3] + \theta_3 [\gamma^1, \gamma^2]) \\ &= \frac{1}{2} \left(\xi_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \xi_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \xi_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \theta_1 \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{bmatrix} + \theta_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \theta_3 \begin{bmatrix} -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

Problema 9

Ítem a

Esta sale considerando una transformación infinitesimal. Sabemos que

$$S_\Lambda = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}\Sigma^{\alpha\beta}\right)$$

$$\Sigma^{\alpha\beta} = \frac{i}{4}[\gamma^\alpha, \gamma^\beta] \rightarrow = \exp\left(\frac{1}{8}\omega_{\alpha\beta}[\gamma^\alpha, \gamma^\beta]\right)$$

ω infinitesimal $\rightarrow \sim \dots$

Ítem b

Usando la identidad del ítem (a) esto es

$$\overline{\psi'(x')} = \psi'^{\dagger}(x')\gamma^0 \leftarrow \overline{\psi} \stackrel{\text{def}}{=} \psi^{\dagger}\gamma^0$$

$$\psi'(x') = S_\Lambda\psi(x(x')) \rightarrow = (S_\Lambda\psi(x(x')))^{\dagger}\gamma^0$$

$$= \psi^{\dagger}S_\Lambda^{\dagger}\gamma^0$$

$$S^{\dagger}\gamma^0 = \gamma^0S^{-1} \rightarrow = \psi^{\dagger}\gamma^0S_\Lambda^{-1}$$

$$= \overline{\psi}S_\Lambda^{-1}$$

Ítem c

$\overline{\psi}\psi$ es un invariante de Lorentz $\iff [\overline{\psi}\psi]_{\text{Frame } S} = [\overline{\psi}\psi]_{\text{Frame } S'}$. La cuenta es

$$[\overline{\psi}\psi]_{\text{Frame } S'} = \overline{\psi'}\psi'$$

$$\left. \begin{array}{l} \psi' = S_\Lambda\psi \\ \overline{\psi'} = \overline{\psi}S_\Lambda^{-1} \end{array} \right\} \rightarrow = \overline{\psi}S_\Lambda^{-1}S_\Lambda\psi$$

$$= \overline{\psi}\psi$$

$$= [\overline{\psi}\psi]_{\text{Frame } S}$$

Ítem d

$J^\mu \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\psi}\gamma^\mu\psi$ es un cuadrivector $\iff [J^\mu]_{\text{Frame } S'} = \Lambda^\mu{}_\nu [J^\nu]_{\text{Frame } S}$. La cuenta es

$$[J^\mu]_{\text{Frame } S'} \equiv \overline{\psi'}\gamma^\mu\psi'$$

$$\left. \begin{array}{l} \psi' = S_\Lambda\psi \\ \overline{\psi'} = \overline{\psi}S_\Lambda^{-1} \end{array} \right\} \rightarrow = \overline{\psi}S_\Lambda^{-1}\gamma^\mu S_\Lambda\psi$$

$$S_\Lambda^{-1}\gamma^\mu S_\Lambda \stackrel{\text{def}}{=} \Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu \rightarrow = \overline{\psi}\gamma^\nu\Lambda^\mu{}_\nu\psi$$

$$\equiv \Lambda^\mu{}_\nu [J^\nu]_{\text{Frame } S}$$

Problema 10

Por fuerza bruta

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(t, -\mathbf{x}) = 0$$

$$(i\gamma^0\partial_0 + i\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla} - m)\psi(t, -\mathbf{x}) = \leftarrow \partial^\mu = \begin{bmatrix} \partial_t \\ -\boldsymbol{\nabla} \end{bmatrix}$$

$$(i\gamma^0\partial_0 - i\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla} - m)\psi(t, \mathbf{x}) = \leftarrow \boldsymbol{\nabla}\psi(t, -\mathbf{x}) = -\boldsymbol{\nabla}\psi(t, \mathbf{x})$$

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - 2i\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla} - m)\psi(t, \mathbf{x}) = \leftarrow \partial^\mu = \begin{bmatrix} \partial_t \\ -\boldsymbol{\nabla} \end{bmatrix}$$

$$-2i\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla}\psi(t, \mathbf{x}) = \leftarrow \psi(t, \mathbf{x}) \text{ satisface Dirac}$$

$$0 \neq$$

por lo tanto $\psi(t, -\mathbf{x})$ no satisface la ecuación.

Problema 11

[Halzen and Martin, 2008, Exercise 5.13]

Ítem a

Haciendo la cuenta en la base de Dirac se tiene que

$$\gamma^5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{En base de Dirac}$$

Con esta expresión todo lo que pide la consigna es de demostración trivial.

Si uno quiere mantenerse en el mundo de lo abstracto, la hermiticidad de γ^5 es

$$\begin{aligned} (\gamma^5)^\dagger &= (i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3)^\dagger \\ &= (-i)(\gamma^3)^\dagger(\gamma^2)^\dagger(\gamma^1)^\dagger(\gamma^0)^\dagger \\ (\gamma^\mu)^\dagger &= \begin{cases} -\gamma^\mu & \text{para } \mu \neq 0 \\ \gamma^\mu & \text{para } \mu = 0 \end{cases} \rightarrow = i\gamma^3\gamma^2\gamma^1\gamma^0 \\ \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \Rightarrow \gamma^\mu\gamma^\nu = -\gamma^\nu\gamma^\mu & \text{para } \mu \neq \nu \rightarrow = i\gamma^3\gamma^2(-\gamma^0\gamma^1) \\ \text{Ídem } N \text{ veces} \rightarrow & = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \\ & = \gamma^5 \end{aligned}$$

la cuadiunitariedad es

$$\begin{aligned} (\gamma^5)^2 &= -\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \\ \gamma^\mu\gamma^\nu = -\gamma^\nu\gamma^\mu & \text{ para } \mu \neq \nu \rightarrow = -(-\gamma^0\gamma^0)(\gamma^1\gamma^1)(-\gamma^2\gamma^2)(\gamma^3\gamma^3) \\ (\gamma^\mu)^2 = \mathbb{1}\eta^{\mu\mu} & \rightarrow = \mathbb{1} \end{aligned}$$

y la anticonmutabilidad debe salir de forma similar, ya fue.

Ítem b

Si P_α proyecta sobre el autoespacio con autovalor α de la matriz γ^5 , $A_\alpha^{\gamma^5}$, y si $\psi \in A_\alpha^{\gamma^5}$, entonces $\begin{cases} \gamma^5\psi = \alpha\psi \\ P_\alpha\psi = \psi \end{cases}$.

Los autovalores y autovectores de γ^5 son

Autovalor	Autovector
-1	$\left \begin{array}{l} \psi_1 = [1 \ 0 \ -1 \ 0]^T \\ \psi_2 = [0 \ 1 \ 0 \ -1]^T \end{array} \right.$
1	$\left \begin{array}{l} \psi_3 = [1 \ 0 \ 1 \ 0]^T \\ \psi_4 = [0 \ 1 \ 0 \ 1]^T \end{array} \right.$

Haciendo las cuentitas se verifica efectivamente que

$$P_+ \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad P_- \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix}$$

Ítem c

La operación de paridad es, como se definió en algún problema previo,

$$\mathcal{P}\psi \stackrel{\text{def}}{=} \gamma^0 \psi(t, -\mathbf{x}) \rightarrow \text{Parity operator}$$

Viendo la expresión de los ψ_i que son autovalores de γ^5 (ítem previo) y recordando que $\gamma^0 = \begin{bmatrix} \mathbb{1} & \\ & -\mathbb{1} \end{bmatrix}$ es claro que

$$\begin{cases} \mathcal{P}\psi_{1,2} = \gamma^0 \psi_{1,2} = \psi_{3,4} \\ \mathcal{P}\psi_{3,4} = \gamma^0 \psi_{3,4} = \psi_{1,2} \end{cases}$$

Problema 12

Ítem a

De la definición de ψ_R y ψ_L y del hecho de que P_{\pm} son proyectores vale que

$$\begin{aligned} \psi_R + \psi_L &= P_+ \psi + P_- \psi \\ &= (P_+ + P_-) \psi \\ P_+ + P_- &\equiv \mathbb{1} \rightarrow = \psi \end{aligned}$$

Entonces la ecuación de Dirac puede escribirse en términos de $\psi_{R,L}$ como

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)(\psi_R + \psi_L) = 0 \rightarrow \text{Eq. de Dirac}$$

Para poder seguir ahora hay que considerar la representación de Weyl para las γ^μ . Esta representación es tal que

$$\text{Representación de Weyl} \rightarrow \begin{cases} \gamma^0 = \begin{bmatrix} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \end{bmatrix} \\ \gamma^i = \begin{bmatrix} & \sigma_i \\ -\sigma_i & \end{bmatrix} \end{cases}$$

En esta representación se tiene que

$$\begin{cases} P_- = \begin{bmatrix} \mathbb{1} & \\ & 0 \end{bmatrix} \\ P_+ = \begin{bmatrix} 0 & \\ & \mathbb{1} \end{bmatrix} \end{cases}$$

con lo cual

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{bmatrix} \rightarrow \text{En base de Weyl}$$

con ψ_L, ψ_R objetos de dos componentes. Reemplazando estas expresiones en la ecuación de Dirac se obtiene

$$\begin{aligned} (\gamma^\mu \bar{p}_\mu - m)(\psi_R + \psi_L) &= \left(\begin{bmatrix} & \bar{p}_0 \\ \bar{p}_0 & \end{bmatrix} - \bar{p}_i \begin{bmatrix} & \sigma_i \\ -\sigma_i & \end{bmatrix} - m \right) \begin{bmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \bar{p}_0 \psi_R - \bar{p}_i \sigma_i \psi_R - m \psi_L \\ \bar{p}_0 \psi_L + \bar{p}_i \sigma_i \psi_L - m \psi_R \end{bmatrix} \end{aligned}$$

por lo tanto las ecuaciones para $\psi_{L,R}$ son

$$\begin{cases} (\bar{p}_0 - \boldsymbol{\sigma} \cdot \bar{\mathbf{p}}) \psi_R = m \psi_L \\ (\bar{p}_0 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \bar{\mathbf{p}}) \psi_L = m \psi_R \end{cases}$$

o, en la representación de posiciones,

$$\begin{cases} i \frac{\partial \psi_R}{\partial t} - i \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \psi_R = m \psi_L \\ i \frac{\partial \psi_L}{\partial t} + i \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \psi_L = m \psi_R \end{cases}$$

Ítem b

Partículas livianas En el límite de partículas sin masa es trivial ver que el sistema se desacopla. Basta con hacer $m \rightarrow 0$.

Partículas relativistas En el caso de una partícula relativista vale que

$$k^\mu \sim \begin{bmatrix} E \\ E\hat{\mathbf{k}} \end{bmatrix} \rightarrow \text{Caso relativista}$$

con $E \gg m$. En este caso

$$\left. \begin{aligned} (\overline{p_0} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \overline{\mathbf{p}}) \psi_R &= m\psi_L \\ (\overline{p_0} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \overline{\mathbf{p}}) \psi_L &= m\psi_R \end{aligned} \right\} \sim \begin{cases} E(1 - \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{k}}) \psi_R = m\psi_L \\ E(1 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{k}}) \psi_L = m\psi_R \end{cases}$$

Como $E \gg m$ entonces se obtienen las mismas ecuaciones que antes (?).

Espinores de quiralidad definida Para el caso de $m = 0$

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \right) \psi_R = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \right) \psi_L = 0 \end{cases}$$

y las soluciones son

$$\begin{cases} \psi_R \sim t + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{x} \\ \psi_L \sim t - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{x} \end{cases}$$

Mmmmmmmmm esto es muy raro...

Problema 13

Ítem a

Un **pseudoescalar** es una cantidad $\in \mathbb{C}$ pero que frente a una transformación de paridad sufre un cambio de signo. La cuenta es

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\overline{\psi}\gamma^5\psi) &= (\mathcal{P}\overline{\psi})\gamma^5(\mathcal{P}\psi) \\ \left. \begin{aligned} \mathcal{P}\psi &\stackrel{\text{def}}{=} \gamma^0\psi(t, -\mathbf{x}) \\ \mathcal{P}\overline{\psi} &= \overline{\psi(t, -\mathbf{x})}\gamma^0 \end{aligned} \right\} \rightarrow = \overline{\psi(t, -\mathbf{x})}\gamma^0\gamma^5\gamma^0\psi(t, -\mathbf{x}) \\ \left. \begin{aligned} \{\gamma^5, \gamma^\mu\} &= 0 \\ (\gamma^0)^2 &= \mathbf{1} \end{aligned} \right\} \rightarrow = -\overline{\psi(t, -\mathbf{x})}\gamma^5\psi(t, -\mathbf{x}) \end{aligned}$$

por lo tanto $\overline{\psi}\gamma^5\psi$ es un pseudoescalar.

Ítem b

Procedo igual que en el ítem (a):

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\overline{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi) &= \overline{\psi(t, -\mathbf{x})}\gamma^0\gamma^\mu\gamma^5\gamma^0\psi(t, -\mathbf{x}) \\ \left. \begin{aligned} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} &= 2\eta^{\mu\nu}\mathbf{1} \\ \{\gamma^5, \gamma^\mu\} &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow = -\overline{\psi(t, -\mathbf{x})}\gamma^0(2\eta^{0\mu} - \gamma^0\gamma^\mu)\gamma^\mu\gamma^5\psi(t, -\mathbf{x}) \\ (\gamma^\mu)^2 = \mathbf{1}\eta^{\mu\mu} &\rightarrow = -\overline{\psi(t, -\mathbf{x})}(2\gamma^0\eta^{0\mu} - \eta^{\mu\mu}\gamma^\mu)\gamma^\mu\gamma^5\psi(t, -\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Veamos ahora qué ocurre con ese paréntesis para los distintos valores de μ . Si $\mu = 0$ entonces

$$[\mathcal{P}(\overline{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi)]_{\mu=0} = -\overline{\psi(t, -\mathbf{x})}\gamma^5\psi(t, -\mathbf{x})$$

y para $\mu = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} [\mathcal{P}(\overline{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi)]_{\mu=i \in \{1,2,3\}} &= -\overline{\psi(t, -\mathbf{x})}(\gamma^i)^2\gamma^5\psi(t, -\mathbf{x}) \\ (\gamma^i)^2 = -\mathbf{1} &\rightarrow = \overline{\psi(t, -\mathbf{x})}\gamma^5\psi(t, -\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Como no sé lo que es un “pseudo cuadri vector” no estoy en condiciones de emitir juicio alguno acerca de este resultado...

Problema 14

Se me ocurre lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 [\mathcal{H}_{\text{Dirac}}, h] &= \left[\gamma^0 m + \gamma^0 \gamma^i p_i, \frac{1}{2} \Sigma^j p_j \right] \\
 &= \frac{m}{2} p_j \underbrace{[\gamma^0, \Sigma^j]}_{=0} + \frac{p_i p_j}{2} [\gamma^0 \gamma^i, \Sigma^j] \\
 \text{Rep. de Dirac} \rightarrow &= \frac{p_i p_j}{2} \left[\begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_j & 0 \\ 0 & \sigma_j \end{bmatrix} \right] \\
 &= \frac{p_i p_j}{2} \begin{bmatrix} 0 & [\sigma_i, \sigma_j] \\ [\sigma_i, \sigma_j] & 0 \end{bmatrix} \\
 &= i p_i p_j \varepsilon_{ijk} \sigma_k \\
 &= i \mathbf{p} \cdot (\mathbf{p} \times \boldsymbol{\sigma})
 \end{aligned}$$

y como $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$ para todo par de vectores, esto es nulo.

Problema 15

Las soluciones de la ecuación de Dirac en la base de Dirac son

$$\text{Soluciones base Dirac} \rightarrow \begin{cases} u_i = e^{-ikx} \begin{bmatrix} \xi_i \\ \frac{\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{k^0 + m} \xi_i \end{bmatrix} \\ v_i = e^{ikx} \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{k^0 + m} \xi_i \\ \xi_i \end{bmatrix} \end{cases}$$

donde, recordemos, $\begin{cases} \xi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \xi_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases}$. Por otro lado, también en la base de Dirac, los operadores de la consigna son

$$\gamma^5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad h = \frac{1}{|\mathbf{p}|} \left(p_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + p_2 \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{bmatrix} + p_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right)$$

La isotropía del espacio me permite orientar el sistema de referencia tal que

$$\mathbf{k} = k \hat{z}$$

En este caso las soluciones de la ecuación de Dirac se vuelven

$$\begin{cases} u_1 = e^{-ikx} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{k}{E+m} \\ 0 \end{bmatrix} \\ u_2 = e^{-ikx} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{k}{E+m} \end{bmatrix} \end{cases} \quad \begin{cases} v_1 = e^{ikx} \begin{bmatrix} \frac{k}{E+m} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ v_2 = e^{ikx} \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{k}{E+m} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Ahora sí aplico los operadores, en primer lugar el operador de quiralidad γ^5

$$\begin{cases} \gamma^5 u_1 = e^{-ikx} \begin{bmatrix} \frac{k}{E+m} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \gamma^5 u_2 = e^{-ikx} \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{k}{E+m} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma^5 v_1 = e^{ikx} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{k}{E+m} \\ 0 \end{bmatrix} \\ \gamma^5 v_2 = e^{ikx} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{k}{E+m} \end{bmatrix} \end{cases}$$

y en segundo lugar el operador de helicidad

$$\left\{ \begin{array}{l} hu_1 = e^{-ikx} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{k}{E+m} \\ 0 \end{bmatrix} \\ hu_2 = e^{-ikx} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ \frac{k}{E+m} \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} hv_1 = e^{ikx} \begin{bmatrix} \frac{k}{E+m} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ hv_2 = e^{ikx} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k}{E+m} \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

Ahora tomo el límite ultra relativista $E \gg m$ que implica $E \approx k$ y entonces

$$\frac{k}{E+m} \approx 1 \rightarrow \text{Ultra relativista}$$

y como se puede ver de los resultados obtenidos efectivamente la aplicación de γ^5 produce el mismo resultado que la aplicación de h cuando se aplica a u_i **y también cuando se aplica a v_i** ?

Box 8 - Operadores y espinores abstractos vs matrices gamma y todo eso

Quizá esto sea trivial, pero para mí fue toda una revelación. Resulta que la matriz

$$\gamma^0 = \begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbb{1} & \\ & -\mathbb{1} \end{bmatrix} & \text{en la base de Dirac} \\ \begin{bmatrix} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \end{bmatrix} & \text{en la base de Weyl} \end{cases}$$

es la representación matricial del operador abstracto

$$\underline{\gamma}^0 = \begin{cases} \underline{\sigma}_3 \otimes \underline{\mathbb{1}} & \text{en la base de Dirac} \\ -\underline{\sigma}_1 \otimes \underline{\mathbb{1}} & \text{en la base de Weyl} \end{cases}$$

Algo similar aplica a todos los demás operadores sobre espinores. En consecuencia un espinor

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix}$$

es en realidad la representación matricial de un espinor abstracto

$$|\psi\rangle \stackrel{?}{=} |\psi_a\rangle \otimes |\psi_b\rangle$$

O quizá no siempre se pueda factorizar como ese producto tensorial, quizá sólo en algunos casos. Es algo que aún no sé.

Box 9 - Transformación de similaridad entre base de Dirac y de Weyl

La transformación lineal que relaciona las bases de Dirac y la de Weyl es, aparentemente, la que está en [este link](#). Esta transformación es tal que

$$\Psi_{\text{Base de Weyl}} = T \Psi_{\text{Base de Dirac}}$$

con

$$T = \frac{\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} + i\sigma_2 \otimes \mathbb{1}}{\sqrt{2}}$$

Cada uno de estos productos tensoriales se puede calcular usando la representación matricial en la base de Dirac

$$\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \sim \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

y

$$\sigma_2 \otimes \mathbf{1} \sim \begin{bmatrix} 0 & -i\mathbf{1} \\ i\mathbf{1} & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

por lo tanto

$$T \sim \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Guía 6 - Formulación lagrangiana

Problema 1

Ítem a

Este lagrangiano posee muchas simetrías. Un set de simetrías de este lagrangiano está dado por todas las transformaciones de Poincaré (transformaciones de Lorentz más traslaciones). La simetría de traslación espacial da la conservación del cuadrimomento, la simetría de traslación temporal da la conservación de la energía. La simetría de rotación espacial da la conservación del momento angular y la simetría de boosts no sé qué da. De todos modos, en esta materia no nos interesan estas simetrías (esas se estudian en QFT).

En esta materia estamos interesados, hasta donde entiendo, en las simetrías internas de los lagrangianos que son aquellas simetrías que sólo actúan sobre los campos, y dejan inalteradas a las coordenadas del espaciotiempo. Un ejemplo de simetría interna para este lagrangiano tiene que ver con la transformación de fase

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{iq\alpha} \phi$$

con $q \in \mathbb{R}$ un parámetro constante y $\alpha \in \mathbb{R}$ el parámetro de la transformación (que se hará infinitesimal). Este tipo de transformaciones forman un grupo $\mathbf{U}(1)$. Verificar que forman un grupo es trivial, basta con buscar la **definición de grupo** y ver que se pueden satisfacer con transformaciones como la propuesta.

Box 10 - El grupo $\mathbf{U}(N)$

El grupo $\mathbf{U}(N)$ se define como el grupo formado por el conjunto de matrices unitarias de $N \times N$ y la operación de producto de matrices. Es decir

$$\mathbf{U}(N) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{array}{l} \{U \in \mathbb{C}^{n \times n} \text{ tales que } U^\dagger U = \mathbf{1}\} \\ \text{Producto de matrices} \end{array} \right. \begin{array}{l} \rightarrow \text{Conjunto sobre el cual se define el grupo} \\ \rightarrow \text{Operación sobre la cual se define el grupo} \end{array}$$

Box 11 - El grupo $\mathbf{SU}(N)$

El grupo $\mathbf{SU}(N)$ se define como el grupo formado por el conjunto de matrices U unitarias de $N \times N$ con determinante 1 y la operación de producto de matrices. Es decir

$$\mathbf{SU}(N) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{array}{l} U \in \mathbb{C}^{n \times n} \text{ tales que } \begin{cases} U^\dagger U = \mathbf{1} \\ \det U = 1 \end{cases} \\ \text{Producto de matrices} \end{array} \right. \begin{array}{l} \rightarrow \text{Conjunto sobre el cual se define el grupo} \\ \rightarrow \text{Operación sobre la cual se define el grupo} \end{array}$$

“Se puede mostrar que” toda $U \in \mathbf{SU}(N)$ se puede escribir como

$$U = e^{i\varepsilon_i T_i}$$

donde $\varepsilon_i \in \mathbb{R}$ son un conjunto de $N^2 - 1$ parámetros de la transformación y $T_i \in \mathfrak{su}(N)$ un conjunto de $N^2 - 1$ matrices que satisfacen el álgebra $\mathfrak{su}(N)$ (ver box 12).

Box 12 - Álgebra $\mathfrak{su}(N)$

El álgebra $\mathfrak{su}(N)$ está formada por $N^2 - 1$ matrices T_i antihermíticas ($T_i^\dagger = -T_i$) tales que $[T_i, T_j] = if_{ijk} T_k$ donde f_{ijk} son las constantes de estructura $\mathfrak{su}(N)$.^a

Se dice que $T_i \in \mathfrak{su}(N)$ son los generadores del grupo $\mathbf{SU}(N)$ a través de la relación

$$\mathbf{SU}(N) = e^{\mathfrak{su}(N)}.$$

De manera formal, dada $U \in \mathbf{SU}(N)$ entonces existen $N^2 - 1$ números $\varepsilon_i \in \mathbb{R}$ tales que $U = e^{i\varepsilon_i T_i}$.

Generadores de $\mathbf{SU}(2)$ Los generadores de $\mathbf{SU}(2)$ son las matrices de Pauli $\sigma_i \in \mathfrak{su}(2)$.

Generadores de $\mathbf{SU}(3)$ Los generadores de $\mathbf{SU}(3)$ son las matrices de Gell-Mann $\lambda_i \in \mathfrak{su}(3)$.

^aSi se utiliza la relación de conmutación $[T_i, T_j] = if_{ijk} T_k$ entonces las T_k son “las matrices sin sobre dos”. En cambio, si se utiliza $[T_i, T_j] = \frac{i}{2} f_{ijk} T_k$ entonces ahí hay que empezar a dividir por 2 en vano $T_i = \frac{\sigma_i}{2}$.

En cuanto a la invariancia del lagrangiano, es obvio que éste no cambia:

$$\mathcal{L}' = \partial_\mu \phi'^* \partial^\mu \phi' - m^2 \phi'^* \phi' \equiv \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi = \mathcal{L}.$$

En consecuencia el teorema de Noether garantiza que existe una corriente J^μ que satisface

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \rightarrow \text{Por Noether}$$

lo cual a su vez implica que existe una carga conservada

$$Q = \int J^0 d^3x. \rightarrow \text{Carga de Noether}$$

Box 13 - La corriente de Noether y la carga conservada

Dado un campo cuadvivectorial J^μ que satisface $\partial_\mu J^\mu = 0$ entonces se puede definir una *carga conservada* Q según

$$Q = \int J^0 d^3x \rightarrow \text{Carga de Noether}$$

que satisface

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = 0.$$

El motivo por el cual esto es así es simple. Considérese la ecuación $\partial_\mu J^\mu = 0$. Si se separa la parte temporal de la parte espacial esto es

$$\frac{\partial J^0}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{J}.$$

Intégrese ahora esta ecuación sobre un volumen V (a un tiempo t fijo)

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} J^0 d^3x = \int_V \nabla \cdot \mathbf{J} d^3x.$$

Si este volumen V es independiente del tiempo entonces la operación $\frac{\partial}{\partial t}$ se puede sacar de la integral. Además del lado derecho se puede aplicar el teorema de la divergencia. Entonces

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V J^0 d^3x = \oint_{\partial V} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}.$$

Tómese ahora el límite $V \rightarrow \infty$. Es de esperar que, como toda cantidad física, $[\mathbf{J}]_{\partial V} \xrightarrow{V \rightarrow \infty} 0$ por lo tanto

$$\int J^0 d^3x = \text{constante}$$

tal como se anticipó.

Para calcular la corriente de Noether aplico la formulita que vimos en clase

$$J^\mu = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \frac{\Delta \phi_i}{\alpha} \rightarrow \text{Corriente de Noether}$$

donde $\Delta \phi_i$ es el cambio en el campo ϕ_i a primer orden en α , el parámetro de la transformación. Para este lagrangiano $i = 2$ ya que tenemos ϕ y ϕ^* . La transformación fue definida de modo tal que

$$\text{Por definición} \rightarrow \begin{cases} \phi' = e^{iq\alpha} \phi \\ \phi'^* = e^{-iq\alpha} \phi^* \end{cases}$$

por lo tanto en el caso infinitesimal con $\alpha \rightarrow 0$ vale que

$$\text{Caso infinitesimal} \rightarrow \begin{cases} \phi' = (1 + iq\alpha) \phi \\ \phi'^* = (1 - iq\alpha) \phi^* \end{cases}.$$

Entonces

$$\begin{cases} \Delta \phi = iq\alpha \phi \\ \Delta \phi^* = -iq\alpha \phi^* \end{cases}.$$

La corriente de Noether es, en consecuencia,

$$\begin{aligned} J^\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \frac{\Delta \phi}{\alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^*)} \frac{\Delta \phi^*}{\alpha} \\ &= iq (\phi \partial^\mu \phi^* - \phi^* \partial^\mu \phi). \end{aligned}$$

Obsérvese que esta es la misma corriente que habíamos definido a mano cuando estudiamos Klein-Gordon.

Ítem b

Si $\phi = \phi_1 + i\phi_2$ con $\phi_{1,2} \in \mathbb{R}$ entonces el lagrangiano queda

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \partial_\mu (\phi_1 - i\phi_2) \partial^\mu (\phi_1 + i\phi_2) - m^2 |\phi_1 + i\phi_2|^2 \\ &= \partial_\mu \phi_1 \partial^\mu \phi_1 - m^2 \phi_1^2 + \partial_\mu \phi_2 \partial^\mu \phi_2 - m^2 \phi_2^2 - i\partial_\mu \phi_2 \partial^\mu \phi_1 + i\partial_\mu \phi_1 \partial^\mu \phi_2. \end{aligned}$$

Ahora se aplica Euler-Lagrange $\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}$ para cada uno de los campos ϕ_1 y ϕ_2 . Yendo por pasos, esto es

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_1)} &= 2\partial^\mu \phi_1 - \cancel{i\partial^\mu \phi_2} + \cancel{i\partial^\mu \phi_2}, \\ \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_1)} \right) &= 2\partial_\mu \partial^\mu \phi_1, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_1} &= -2m^2 \phi_1. \end{aligned}$$

Dada la simetría los términos son iguales para ϕ_2 . Entonces las ecuaciones de Euler-Lagrange para estos campos son

$$\begin{cases} (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi_1 = 0 \\ (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi_2 = 0 \end{cases}$$

que son justo las ecuaciones de Klein-Gordon.

Ítem c

Si el lagrangiano es

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi - V(\phi^* \phi)$$

todas las simetrías del grupo de Poincaré se mantienen ya que no aparece ninguna dependencia explícita con x . Por otro lado, la simetría $\mathbf{U}(1)$ también se mantiene, como se ve a simple vista. Pareciera que todo se mantiene.

Las ecuaciones de Euler-Lagrange para este lagrangiano son

$$\begin{cases} (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi - V'(\phi^* \phi) \phi = 0 \\ (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi^* - V'(\phi^* \phi) \phi^* = 0 \end{cases}$$

Ítem d

Una traslación espaciotemporal consiste en no modificar los campos sino las coordenadas

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + \xi^\mu \rightarrow \text{Traslación}$$

con ξ^μ el parámetro de la transformación. En la clase práctica dijeron que no íbamos a ver transformaciones de coordenadas, pero parece que sí. La corriente de Noether es

$$J^\mu = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \delta \phi_i - F^\mu$$

donde F^μ se obtiene de $\delta \mathcal{L} = \partial_\mu F^\mu$. Frente a una traslación el cambio en los campos es

$$\phi' = \phi(x + \xi) \quad \Rightarrow \quad \phi' = \phi + \xi^\mu \partial_\mu \phi + \mathcal{O}(\xi^2)$$

y lo mismo para ϕ^* . El cambio en el lagrangiano, $\delta\mathcal{L}$, se obtiene reemplazando $\phi \rightarrow \phi'$ y descartando todos los términos $\mathcal{O}(\xi^2)$. Esto es

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \partial_\mu \phi'^* \partial^\mu \phi' - m^2 \phi'^* \phi' \\ \left. \begin{aligned} \phi' &= \phi + \xi^\mu \partial_\mu \phi \\ \phi'^* &= \phi^* + \xi^\mu \partial_\mu \phi^* \end{aligned} \right\} \rightarrow &= \partial_\mu (\phi^* + \xi^\nu \partial_\nu \phi^*) \partial^\mu (\phi + \xi^\sigma \partial_\sigma \phi) - m^2 (\phi^* + \xi^\lambda \partial_\lambda \phi^*) (\phi + \xi^\rho \partial_\rho \phi) \\ &= \underbrace{\partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi}_{\mathcal{L}} + \underbrace{\xi^\nu \partial_\mu \partial_\nu \phi^* \partial^\mu \phi + \xi^\sigma \partial^\mu \partial_\sigma \phi \partial_\mu \phi^* - m^2 (\xi^\rho \phi^* \partial_\rho \phi + \xi^\lambda \phi \partial_\lambda \phi^*)}_{\delta\mathcal{L}} + \mathcal{O}(\xi^2). \end{aligned}$$

El $\delta\mathcal{L}$ es, entonces,

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \xi^\nu \partial_\mu \partial_\nu \phi^* \partial^\mu \phi + \xi^\sigma \partial^\mu \partial_\sigma \phi \partial_\mu \phi^* - m^2 (\xi^\rho \phi^* \partial_\rho \phi + \xi^\lambda \phi \partial_\lambda \phi^*) \\ &= \xi^\mu (\partial_\nu \partial_\mu \phi^* \partial^\nu \phi + \partial_\rho \partial_\mu \phi \partial^\rho \phi^*) - m^2 \xi^\mu (\phi^* \partial_\mu \phi + \phi \partial_\mu \phi^*) \\ &= \partial_\mu (\xi^\mu [\partial_\nu \phi^* \partial^\nu \phi - m^2 \phi^* \phi]) \\ &= \partial_\mu \xi^\mu \mathcal{L} \end{aligned}$$

Aquí se reconoce el $F^\mu = \xi^\mu \mathcal{L}$ de la corriente de Noether.

$$\text{Usando } \begin{cases} \delta\phi = \xi^\mu \partial_\mu \phi \\ \delta\phi^* = \xi^\mu \partial_\mu \phi^* \\ F^\mu = \xi^\mu \mathcal{L} \\ \mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi \end{cases} \quad \text{la corriente de Noether es}$$

$$\begin{aligned} J^\mu &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^*)} \delta\phi^* - F^\mu \\ &= (\partial^\mu \phi^*) (\xi^\sigma \partial_\sigma \phi) + (\partial^\mu \phi) (\xi^\sigma \partial_\sigma \phi^*) - \xi^\mu (\partial_\sigma \phi^* \partial^\sigma \phi - m^2 \phi^* \phi) \\ &= \xi^\sigma (\partial^\mu \phi^* \partial_\sigma \phi + \partial^\mu \phi \partial_\sigma \phi^*) - \xi^\mu \partial_\sigma \phi^* \partial^\sigma \phi + \xi^\mu m^2 \phi^* \phi. \end{aligned}$$

La carga conservada es

$$\begin{aligned} Q &= \int J^0 d^3x \leftarrow \text{Carga de Noether} \\ &= \int (\xi^\sigma (\partial^0 \phi^* \partial_\sigma \phi + \partial^0 \phi \partial_\sigma \phi^*) - \xi^0 \partial_\sigma \phi^* \partial^\sigma \phi + \xi^0 m^2 \phi^* \phi) d^3x \\ &= \xi^\sigma \int (\partial^0 \phi^* \partial_\sigma \phi + \partial^0 \phi \partial_\sigma \phi^*) d^3x - \xi^0 \int \partial_\sigma \phi^* \partial^\sigma \phi d^3x + \xi^0 m^2 \int |\phi|^2 d^3x. \end{aligned}$$

Para una traslación temporal

$$\xi^\mu \sim \begin{bmatrix} \xi \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Traslación temporal}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} [Q]_{\text{Traslación temporal}} &= \xi \int (\partial^0 \phi^* \partial_0 \phi + \partial^0 \phi \partial_0 \phi^*) d^3x - \xi \int \partial_\sigma \phi^* \partial^\sigma \phi d^3x + \xi m^2 \int |\phi|^2 d^3x \\ &= \cancel{2\xi} \int \left| \frac{\partial\phi}{\partial t} \right|^2 d^3x - \xi \int \left(\left| \frac{\partial\phi}{\partial t} \right|^2 - |\nabla\phi|^2 \right) d^3x + \xi m^2 \int |\phi|^2 d^3x \\ &= \xi \int \left(\left| \frac{\partial\phi}{\partial t} \right|^2 + |\nabla\phi|^2 \right) d^3x + \xi m^2 \int |\phi|^2 d^3x. \end{aligned}$$

Como se puede ver $Q > 0$ como se pidió mostrar \checkmark .

Problema 2

Ítems a y b

Las ecuaciones de Euler-Lagrange para este lagrangiano son

$$\begin{cases} \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Psi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi} = 0 \\ \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\Psi})} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\Psi}} = 0 \end{cases}$$

o bien

$$\begin{cases} \partial_\mu \bar{\Psi} \gamma^\mu i + m \bar{\Psi} = 0 \\ \gamma^\mu i \partial_\mu \Psi - m \Psi = 0 \end{cases}$$

lo cual puede escribirse en forma más compacta del siguiente modo

$$\begin{cases} \bar{\Psi} (\overleftarrow{\partial}_\mu \gamma^\mu i + m) = 0 \\ (i \gamma^\mu \partial_\mu + m) \Psi = 0 \end{cases}$$

Ítem c

La simetría interna “típica” de este lagrangiano es la misma que para el lagrangiano de Klein-Gordon vista en el problema previo. Es decir una transformación de la forma

$$\text{Transformación } \mathbf{U}(1) \rightarrow \begin{cases} \Psi \rightarrow e^{iq\varepsilon} \Psi \\ \bar{\Psi} \rightarrow \bar{\Psi} e^{-iq\varepsilon} \end{cases}$$

del grupo $\mathbf{U}(1)$ donde $q \in \mathbb{R}$ es una constante y $\varepsilon \in \mathbb{R}$ es el parámetro de la transformación. Es trivial verificar que $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = \mathcal{L}$. Entonces, por teorema de Noether, existe una corriente J^μ que satisface $\partial_\mu J^\mu = 0$ lo cual implica que la carga $Q = \int J^0 d^3x$ es constante en el tiempo. La corriente de Noether es

$$\text{Corriente de Noether} \rightarrow \begin{cases} \varepsilon J^\mu = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \delta \phi_i(\varepsilon) + F(\varepsilon)^\mu \\ \delta \mathcal{L} = \partial_\mu F^\mu \quad \varepsilon \rightarrow 0 \text{ es el parámetro} \end{cases}$$

y en este caso, como $\delta \mathcal{L} = 0$, entonces se puede tomar $F^\mu = 0$. Entonces

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Psi)} \frac{\delta \Psi}{\varepsilon} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\Psi})} \frac{\delta \bar{\Psi}}{\varepsilon}$$

$$\delta \Psi = iq\varepsilon \Psi \rightarrow = -q \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi$$

que es exactamente la corriente de Dirac que se estudió con anterioridad (a menos de una constante que siempre se puede redefinir).

Problema 4

Voy a asumir que el lagrangiano es

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - m^2 \phi^* \phi + \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi^* - M^2 \varphi^* \varphi - V(|\phi|, |\varphi|)$$

Ítem a

Una de las ecuaciones de Euler-Lagrange es

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$$

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi^* + m^2 \phi^* + \frac{\partial V}{\partial |\phi|} \phi^* =$$

por lo tanto las cuatro ecuaciones para cada uno de los campos son

$$\begin{cases} \left(\partial_\mu \partial^\mu + m^2 + \frac{\partial V}{\partial |\phi|} \right) \phi = 0 \\ \left(\partial_\mu \partial^\mu + m^2 + \frac{\partial V}{\partial |\phi|} \right) \phi^* = 0 \\ \left(\partial_\mu \partial^\mu + M^2 + \frac{\partial V}{\partial |\varphi|} \right) \varphi = 0 \\ \left(\partial_\mu \partial^\mu + M^2 + \frac{\partial V}{\partial |\varphi|} \right) \varphi^* = 0 \end{cases} .$$

Ítem b

Para estudiar la simetría $\mathbf{U}(2)$ se considera la siguiente expresión compacta para el lagrangiano

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi - \Phi^\dagger \mathcal{M}^2 \Phi - V(\Phi)$$

donde $\Phi = \begin{bmatrix} \phi \\ \varphi \end{bmatrix}$ y $\mathcal{M} = \begin{bmatrix} m & \\ & M \end{bmatrix}$. Se propone una transformación de $\mathbf{SU}(2)$ de la forma

$$\Phi \rightarrow \Phi' = e^{iq\varepsilon_i T_i} \Phi \rightarrow \text{Transformación} \in \mathbf{SU}(2) \tag{1}$$

donde $\varepsilon_i \in \mathbb{R}^2$ son tres parámetros de la transformación y T_i son los elementos del álgebra $\mathfrak{su}(2)$, i.e. las matrices de Pauli (ver box 12). Frente a una transformación de este tipo el cambio en el lagrangiano es

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \partial_\mu \Phi'^\dagger \partial^\mu \Phi' - \Phi'^\dagger \mathcal{M}^2 \Phi' - V(\Phi') \\ \left. \begin{aligned} \Phi' &= U\Phi \\ \Phi'^\dagger &= \Phi^\dagger U^\dagger \end{aligned} \right\} \rightarrow &= \partial_\mu (\Phi^\dagger U^\dagger) \partial^\mu (U\Phi) - (\Phi^\dagger U^\dagger) \mathcal{M}^2 (U\Phi) - V(\Phi') \\ U^\dagger &= U^{-1} \rightarrow &= \partial_\mu \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi - \Phi^\dagger U^\dagger \mathcal{M}^2 U \Phi - V(\Phi'). \end{aligned}$$

Entonces la condición sobre las masas tal que (1) es una simetría del lagrangiano es que

$$\mathcal{M}^2 = U^\dagger \mathcal{M}^2 U$$

o equivalentemente

$$[\mathcal{M}^2, U] = 0.$$

Para $\mathcal{M}^2 \propto \mathbb{1}$ esto se satisface trivialmente, por lo tanto si $m = M$ el lagrangiano tiene una simetría de tipo $\mathbf{SU}(2)$.

En cuanto a V , una posibilidad es que

$$V(|\phi|, |\varphi|) = f(|\phi|^2 + |\varphi|^2) = f(\Phi^\dagger \Phi)$$

Es trivial ver que en este caso que $V(|\phi'|, |\varphi'|)$ es invariante.

Problema 5

Ítem a

Una transformación de simetría para este lagrangiano es

$$\begin{cases} \Psi'_1 = \Psi_1 e^{i\alpha_1} \\ \Psi'_2 = \Psi_2 e^{i\alpha_2} \\ \Psi'_3 = \Psi_3 e^{i\alpha_3} \end{cases}$$

con $\alpha_i \in \mathbb{R}$ tres parámetros independientes. En forma matricial esto es

$$\begin{bmatrix} \Psi'_1 \\ \Psi'_2 \\ \Psi'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{i\alpha_1} & & \\ & e^{i\alpha_2} & \\ & & e^{i\alpha_3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{bmatrix} .$$

Debido a que la matriz de transformación de la simetría es una matriz de 3×3 con 3 parámetros, uno podría verse en la tentación de decir que $\mathbf{U}(3)$ es una simetría de \mathcal{L} . Sin embargo esto no es cierto ya que $\begin{bmatrix} e^{i\alpha_1} & & \\ & e^{i\alpha_2} & \\ & & e^{i\alpha_3} \end{bmatrix}$ son tres representaciones de $\mathbf{U}(1)$ y no una de $\mathbf{U}(3)$. Esto puede ser obvio, o no. Para verlo más claramente considérese

$$\begin{bmatrix} e^{i\alpha_1} & & \\ & e^{i\alpha_2} & \\ & & e^{i\alpha_3} \end{bmatrix} = \exp\left(i\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix}\right) + \exp\left(i\alpha_2 \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{bmatrix}\right) + \exp\left(i\alpha_3 \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{bmatrix}\right)$$

lo cual claramente es $\neq e^{i\alpha_i T_i}$ con T_i los generadores de algún álgebra conocida. Entonces

$$\begin{bmatrix} e^{i\alpha_1} & & \\ & e^{i\alpha_2} & \\ & & e^{i\alpha_3} \end{bmatrix} \in \mathbf{U}(1) \times \mathbf{U}(1) \times \mathbf{U}(1).$$

Por otro lado una transformación con una matriz que no sea diagonal no es una simetría ya que mezcla las masas.

Entonces, en conclusión, el lagrangiano propuesto tiene tres simetrías $\mathbf{U}(1)$. Esto se suele denotar diciendo que el grupo de simetría de este lagrangiano es $\mathbf{U}(1) \times \mathbf{U}(1) \times \mathbf{U}(1)$.

Ítem b

El lagrangiano se puede expresar en forma compacta según

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} (i\Gamma^\mu \partial_\mu - \mathcal{M}) \Psi$$

con $\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{bmatrix}$, $\Gamma^\mu = \begin{bmatrix} \gamma^\mu & & \\ & \gamma^\mu & \\ & & \gamma^\mu \end{bmatrix}$ y $\mathcal{M} = \begin{bmatrix} m_1 & & \\ & m_2 & \\ & & m_3 \end{bmatrix}$. Considérese una transformación

$$\Psi \rightarrow \Psi' = U\Psi$$

con U una matriz unitaria de 3×3 . O sea que $U \in \mathbf{U}(3)$. Obsérvese que

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}' &= \bar{\Psi} U \\ &= \Psi^\dagger U^\dagger \gamma^0 \\ &= \bar{\Psi} U^\dagger \end{aligned}$$

donde usé que $[U, \gamma^0] = 0$ pues γ^0 es una matriz de 4×4 y U es una matriz de 3×3 compuesta por matrices de 4×4 , por lo tanto $U^\dagger \gamma^0 \equiv U^\dagger \Gamma^0$. O sea, U es algo así como una matriz de 12×12 .

Entonces

$$\left. \begin{array}{l} [U, \Gamma^\mu] = 0 \\ U \text{ unitaria} \end{array} \right\} \rightarrow \begin{aligned} \mathcal{L}' &= \bar{\Psi}' (i\Gamma^\mu \partial_\mu - \mathcal{M}) \Psi' \\ &= \bar{\Psi} U^\dagger (i\Gamma^\mu \partial_\mu - \mathcal{M}) U \Psi \\ &= \bar{\Psi} (i\Gamma^\mu \partial_\mu - U^\dagger \mathcal{M} U) \Psi. \end{aligned}$$

Para que $\mathcal{L}' = \mathcal{L}$ es necesario que

$$\mathcal{M} = U^\dagger \mathcal{M} U$$

o bien, sabiendo que $U^\dagger = U^{-1}$,

$$[\mathcal{M}, U] = 0.$$

Si $\mathcal{M} \propto \mathbf{1}$, i.e. si $m_1 = m_2 = m_3$, lo anterior se satisface. En este caso $\mathbf{U}(3)$ es una simetría de \mathcal{L} .

Problema 6 (pregunta para nada crucial pero que me gustaría saber)

PREGUNTA: Ver al final de todo, no sé cómo “procesar” las ecuaciones que se obtienen de los campos de Dirac para recuperar las leyes de Newton y/o la fuerza de Lorentz. Pude obtener las ecuaciones de Maxwell pero no lo otro...

Quiero llegar a las ecuaciones de Maxwell a partir de este lagrangiano. Después de lo que vimos el otro día en la clase con las simetrías de gauge me parece algo increíble.

Ítem a

Usando $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$ y $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ el lagrangiano es

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= i\bar{\Psi}\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu)\Psi - m\bar{\Psi}\Psi - \frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\ &= \bar{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi + q\bar{\Psi}\gamma^\mu A_\mu\Psi - \frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu\partial^\mu A^\nu + \partial_\nu A_\mu\partial^\nu A^\mu - \partial_\mu A_\nu\partial^\nu A^\mu - \partial_\nu A_\mu\partial^\mu A^\nu) \\ &= \bar{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi + q\bar{\Psi}\gamma^\mu A_\mu\Psi - \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu\partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu\partial^\nu A^\mu). \end{aligned}$$

El primer término corresponde a un campo de Dirac libre, el segundo término corresponde a la interacción entre Ψ y A mientras que el tercer término es el campo A libre.

Ítem c

Este lagrangiano tiene tres campos que son $\Psi, \bar{\Psi}$ y A_μ . En consecuencia habrá tres ecuaciones de Euler-Lagrange. Aplicando Euler-Lagrange respecto al campo Ψ se obtiene

$$\begin{aligned} \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Psi)} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi} \\ \partial_\mu \bar{\Psi} \gamma^\mu i &= -m\bar{\Psi} + q\bar{\Psi} \gamma^\mu A_\mu, \end{aligned}$$

para $\bar{\Psi}$ esto es

$$\begin{aligned} \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\Psi})} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\Psi}} \\ 0 &= (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi + q\gamma^\mu A_\mu \Psi \end{aligned}$$

y para A_μ las cuentas son levemente menos triviales por lo que procederé secuencialmente. En primer lugar

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} (\partial_\rho A_\sigma \partial^\rho A^\sigma) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} (\partial_\rho A_\sigma \partial^\sigma A^\rho) \\ &= -\frac{\partial (\partial_\rho A_\sigma)}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \partial^\rho A^\sigma + \frac{\partial (\partial_\rho A_\sigma)}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \partial^\sigma A^\rho \\ &= -\delta^\mu_\rho \delta^\nu_\sigma \partial^\rho A^\sigma + \delta^\mu_\rho \delta^\nu_\sigma \partial^\sigma A^\rho \\ &= -\partial^\mu A^\nu + \partial^\nu A^\mu \\ &= -F^{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = q\bar{\Psi} \gamma^\nu \Psi.$$

Entonces la ecuación de Euler-Lagrange que se obtiene del campo A_ν es

$$-\partial_\mu F^{\mu\nu} = \bar{\Psi} \gamma^\nu \Psi.$$

Las ecuaciones de movimiento obtenidas para los campos son

$$\text{Eqs. de movimiento} \rightarrow \begin{cases} \begin{cases} -\partial_\mu F^{\mu\nu} = \bar{\Psi} \gamma^\nu \Psi \\ F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \end{cases} & \rightarrow \text{Eqs. de Maxwell} \\ \begin{cases} (\gamma^\mu [i\partial_\mu + qA_\mu] - m)\Psi = 0 \\ \bar{\Psi} \left([i\overleftarrow{\partial}_\mu - qA_\mu] \gamma^\mu + m \right) = 0 \end{cases} & \rightarrow \text{F de Lorentz + Newton?} \end{cases}$$

Entiendo que las primeras dos son las ecuaciones de Maxwell y las restantes dos ecuaciones tienen que ver con la fuerza de Lorentz y las ecuaciones de Newton para las “partículas cargadas”. En un intento de comprender esto voy a expandir la primera en términos de los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} , para lo cual utilizo

$$F^{\mu\nu} \sim \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Tensor de campo EM}$$

La componente temporal de $\partial_\mu F^{\mu\nu}$ resulta entonces

$$\begin{aligned} \text{Componente temporal} \rightarrow \partial_\mu F^{\mu 0} &= \partial_0 F^{00} - \partial_i F^{i0} \\ &= -\partial_i E_i \\ &= -\nabla \cdot \mathbf{E}. \end{aligned}$$

Las componentes espaciales son

$$\begin{aligned} \text{Componentes espaciales} \rightarrow \partial_\mu F^{\mu i} &= \partial_0 F^{0i} - \partial_j F^{ji} \\ &= -\partial_0 E_i + \varepsilon_{jki} \partial_j B_k \\ &\sim -\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{B}. \end{aligned}$$

Entonces

$$-\partial_\mu F^{\mu\nu} = \bar{\Psi} \gamma^\nu \Psi \quad \equiv \quad \begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = \bar{\Psi} \gamma^0 \Psi \\ \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \bar{\Psi} \boldsymbol{\gamma} \Psi \end{cases}$$

que son las ecuaciones de Maxwell que acoplan al campo electromagnético a las fuentes. Pareciera que

$$\begin{cases} \bar{\Psi} \gamma^0 \Psi \equiv \text{densidad de carga} \\ \bar{\Psi} \boldsymbol{\gamma} \Psi \equiv \text{densidad de corriente} \end{cases}$$

lo cual es alucinante.

De la segunda ecuación, $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$, en conjunto con la expresión de $F^{\mu\nu}$ en términos de \mathbf{E} y \mathbf{B} y recordando que

$$A^\mu \sim \begin{bmatrix} \phi \\ \mathbf{A} \end{bmatrix} \rightarrow \text{Potenciales electrodinámicos}$$

y $\partial^\mu \sim \begin{bmatrix} \partial_t \\ -\nabla \end{bmatrix}$ se tiene que

$$\begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ & 0 & -B_z & B_y \\ & & 0 & -B_x \\ & & & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \partial_t A_x + \partial_x \phi & \partial_t A_y + \partial \phi & \partial_t A_z + \partial_z \phi \\ & 0 & \partial_x A_y - \partial_y A_x & \partial_x A_z - \partial_z A_x \\ & & 0 & \partial_y A_z - \partial_z A_y \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

o bien

$$\begin{cases} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi \\ \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \end{cases}$$

Es una identidad matemática (a esta altura debería ser trivial) el hecho de que

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad \iff \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0.$$

Por otro lado, tomando el rotor de la primera ecuación y derivando a la segunda respecto al tiempo se obtiene

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \times (\nabla \phi) \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{A} \end{cases}$$

Usando que $\nabla \times (\nabla \phi) \equiv 0$ (identidad matemática) y que $[\frac{\partial}{\partial t}, \nabla \times] = 0$ entonces se obtiene

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Juntando todo lo anterior se obtienen las ecuaciones de Maxwell ♡

$$\begin{cases} -\partial_\mu F^{\mu\nu} = \bar{\Psi} \gamma^\nu \Psi \\ F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \end{cases} \iff \begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = \bar{\Psi} \gamma^0 \Psi \\ \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \bar{\Psi} \boldsymbol{\gamma} \Psi \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

que se supone que ya lo vimos en Teórica 1. Lo único nuevo en lo último que se hizo fue que la densidad de carga y la densidad de corriente ahora se obtienen a partir de Ψ y $\bar{\Psi}$.

A partir de acá está mi duda:

Ahora faltaría ver que las dos ecuaciones de Euler-Lagrange obtenidas con Ψ y $\bar{\Psi}$ implican la fuerza de Lorentz y las leyes de Newton para las partículas cargadas.

$$\begin{cases} (\gamma^\mu [i\partial_\mu + qA_\mu] - m) \Psi = 0 \\ \bar{\Psi} \left(\left[\overleftarrow{\partial}_\mu i - qA_\mu \right] \gamma^\mu + m \right) = 0 \end{cases}$$

Multiplicando la primera ecuación a izquierda por $\bar{\Psi}$ y la segunda a derecha por Ψ se obtiene

$$\begin{cases} i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi + q\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi A_\mu = m\bar{\Psi}\Psi \\ \bar{\Psi}\overleftarrow{\partial}_\mu\gamma^\mu\Psi i - q\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi A_\mu = -m\bar{\Psi}\Psi \end{cases}$$

Sumando y restando

$$\begin{cases} \bar{\Psi} \left(\gamma^\mu \partial_\mu + \overleftarrow{\partial}_\mu \gamma^\mu \right) \Psi = 0 \\ i\bar{\Psi} \left(\gamma^\mu \partial_\mu - \overleftarrow{\partial}_\mu \gamma^\mu \right) \Psi + 2q\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi A_\mu = 2m\bar{\Psi}\Psi \end{cases}$$

$$i\bar{\Psi} \left(\gamma^\mu \partial_\mu - \overleftarrow{\partial}_\mu \gamma^\mu \right) \Psi + 2q \left(\bar{\Psi}\gamma^0\Psi\phi - \bar{\Psi}\boldsymbol{\gamma}\Psi \cdot \mathbf{A} \right) = 2m\bar{\Psi}\Psi$$

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B}) = m\ddot{\mathbf{x}}$$

Me quedo sin tiempo y hay que seguir avanzando con las materias. En otro momento lo veré.

Guía 7A - Teorías de gauge (caso abeliano)

Problema 1

Ítem a

Una transformación

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{i\alpha(x)}\phi \rightarrow \text{Transformación } \mathbf{U(1)} \text{ local}$$

modifica el lagrangiano del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \partial^\mu \phi'^* \partial_\mu \phi' - m^2 \phi'^* \phi' \\ \phi' = e^{i\alpha} \phi \rightarrow &= \partial^\mu \left(e^{-i\alpha(x)} \phi^* \right) \partial_\mu \left(e^{i\alpha(x)} \phi \right) - m^2 \cancel{e^{-i\alpha(x)}} \phi^* \phi \cancel{e^{i\alpha(x)}} \\ &= \left(-i\partial^\mu \alpha e^{-i\alpha} \phi^* + e^{-i\alpha} \partial^\mu \phi^* \right) \left(i\partial_\mu \alpha e^{i\alpha} \phi + e^{i\alpha} \partial_\mu \phi \right) - m^2 \phi^* \phi \\ &= \partial^\mu \alpha \partial_\mu \alpha \phi^* \phi - i\partial^\mu \alpha \phi^* \partial_\mu \phi + i\partial^\mu \phi^* \partial_\mu \alpha \phi + \underbrace{\partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi - m^2 \phi^* \phi}_{\mathcal{L}} \\ &= \partial^\mu \alpha \partial_\mu \alpha \phi^* \phi + i\partial^\mu \alpha \left(\partial_\mu \phi^* \phi - \phi^* \partial_\mu \phi \right) + \mathcal{L}. \end{aligned}$$

Debido a que $\mathcal{L}' \neq \mathcal{L} + \partial_\mu F^\mu$ con F^μ cualquier cosa, entonces la transformación no es una simetría ya que las ecuaciones de movimiento serán distintas.

Ítem b

Ahora el lagrangiano es

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = D^*_{\mu} \phi^* D^{\mu} \phi - m^2 \phi^* \phi$$

y proponemos la transformación

$$\text{Proponemos } \rightarrow \begin{cases} \phi \rightarrow \phi' = e^{i\alpha(x)} \phi & \rightarrow \text{Transformación } \in \mathbf{U(1)} \text{ local} \\ A_{\mu} \rightarrow A'_{\mu} = \text{algo que queremos encontrar} \end{cases}$$

tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_{\text{gauge}} &= (D^*_{\mu} \phi^*)' (D^{\mu} \phi)' - m^2 \phi'^* \phi' \\ \phi' = e^{i\alpha} \phi \rightarrow &= (D^*_{\mu} \phi^*)' (D^{\mu} \phi)' - m^2 \phi^* \phi. \end{aligned}$$

Estamos interesados en que la transformación propuesta sea una simetría del lagrangiano, por lo tanto pedimos

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} \quad \iff \quad (D^*_{\mu} \phi^*)' (D^{\mu} \phi)' = D^*_{\mu} \phi^* D^{\mu} \phi \quad \iff \quad (D^{\mu} \phi)' = e^{iR} D^{\mu} \phi$$

con $R \in \mathbb{R}$ cualquier cosa. El término transformado es

$$\begin{aligned} (D^{\mu} \phi)' &= D'^{\mu} \phi' \\ &= (\partial^{\mu} + igA'^{\mu}) (\phi e^{i\alpha}) \\ &= \partial^{\mu} \phi e^{i\alpha} + i\phi \partial^{\mu} \alpha e^{i\alpha} + igA'^{\mu} \phi e^{i\alpha} \\ &= e^{i\alpha} (\partial^{\mu} + igA'^{\mu} + i\partial^{\mu} \alpha) \phi \end{aligned}$$

por lo tanto

$$(D^{\mu} \phi)' = e^{iR} D^{\mu} \phi \quad \iff \quad e^{i\alpha} (\partial^{\mu} + igA'^{\mu} + i\partial^{\mu} \alpha) \phi = e^{iR} (\partial^{\mu} + igA^{\mu}) \phi$$

de donde se obtiene trivialmente que

$$A'^{\mu} = A^{\mu} - \frac{1}{g} \partial^{\mu} \alpha.$$

Esto es lo que queríamos ♡. Por completitud la transformación de gauge frente a la cual el lagrangiano es invariante es:

$$\text{Transformación de gauge } \rightarrow \begin{cases} \phi \rightarrow \phi' = \phi e^{i\alpha} & \rightarrow \text{Transformación } \mathbf{U(1)} \text{ local} \\ A_{\mu} \rightarrow A'_{\mu} = A_{\mu} - \frac{1}{g} \partial_{\mu} \alpha & \rightarrow \text{Transformación de gauge} \end{cases}$$

Ítem c

El tensor $F_{\mu\nu}$ transforma, según la transformación de gauge, del siguiente modo

$$\begin{aligned} (F_{\mu\nu})' &= \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu \\ &= \partial_\mu \left(A_\nu - \frac{1}{g} \partial_\nu \alpha \right) - \partial_\nu \left(A_\mu - \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha \right) \\ &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - \frac{\partial_\mu \partial_\nu \alpha - \partial_\nu \partial_\mu \alpha}{g} \\ &= F_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

En consecuencia es invariante frente a la transformación de gauge. El término

$$\mathcal{L}_{\text{campo de gauge libre}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

no contiene interacciones para A_μ por el hecho de que es cuadrático en A_μ .

Ítem d

El término

$$\mathcal{L}_{\text{de masa para el fotón}} = m^2 A_\mu A^\mu$$

transforma según

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_{\text{de masa para el fotón}} &= m^2 A'_\mu A'^\mu \\ &= m^2 \left(A_\mu - \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha \right) \left(A^\mu - \frac{1}{g} \partial^\mu \alpha \right) \\ &= m^2 A_\mu A^\mu + (\text{algo que no es de la forma } \partial_\mu f^\mu) \end{aligned}$$

por lo tanto las ecuaciones de movimiento cambiarán.

Ítem e

Se hizo algo prácticamente igual en el ítem (c) del problema 6 de la guía 6, ver en página 41.

Problema 2

El problema 12 de la guía 5A del [curso de Teoría Cuántica de Campos dictado durante el primer cuatrimestre de 2018](#) es muy similar a este. Remito a los resueltos de Alf de aquella oportunidad en [este link](#). Además, comento, en las guías de problemas de QFT resueltas por Alf hay una sección de diagramas de Feynman [para dummies](#).

Ítem a

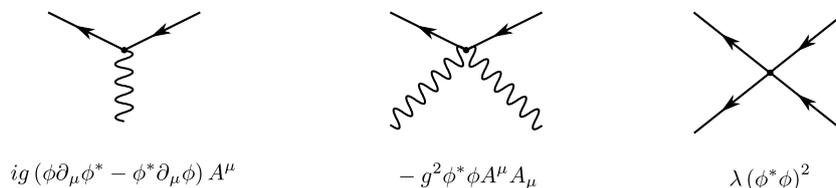
Explícitamente el lagrangiano completo del cual se está hablando es

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= D^*_\mu \phi^* D^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \lambda (\phi^* \phi)^2 \\ D_\mu = \partial_\mu + ig A_\mu \rightarrow &= \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + ig (\partial_\mu \phi^* A^\mu \phi - \partial^\mu \phi A_\mu \phi^*) - g^2 \phi^* \phi A^\mu A_\mu + \lambda (\phi^* \phi)^2 \\ &= \mathcal{L}_\phi \text{ libre} + \mathcal{L}_{A_\mu} \text{ libre} + ig (\phi \partial_\mu \phi^* - \phi^* \partial_\mu \phi) A^\mu - g^2 \phi^* \phi A^\mu A_\mu + \lambda (\phi^* \phi)^2. \end{aligned}$$

Como se puede ver hay tres términos que son más que cuadráticos en los campos. Éstos son los términos de interacción,

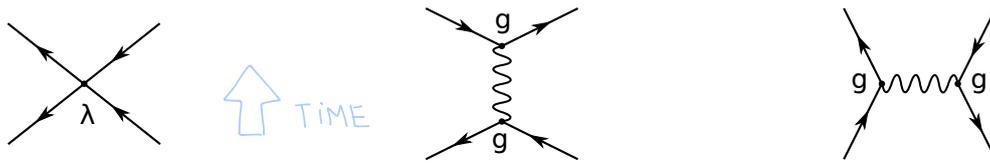
$$\text{Términos de interacción} \rightarrow \begin{cases} ig (\phi \partial_\mu \phi^* - \phi^* \partial_\mu \phi) A^\mu \\ - g^2 \phi^* \phi A^\mu A_\mu \\ \lambda (\phi^* \phi)^2 \end{cases}.$$

De acuerdo a las reglas de Feynman los vértices de este lagrangiano son



Ítem b

Algunos posibles diagramas para el proceso $h + \bar{h} \rightarrow h + \bar{h}$ son



Problema 3

Ítem a

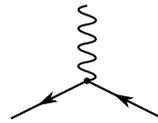
Expandiendo los términos del lagrangiano éste es

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{QED}} &= \bar{\Psi} (i\gamma^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu) - m) \Psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ &= \bar{\Psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi - e\bar{\Psi}\gamma^\mu \Psi A_\mu - \frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu). \end{aligned}$$

Como se ve existe sólo un término “más que cuadrático” que es la única interacción. Este término es

$$e\bar{\Psi}\gamma^\mu \Psi A_\mu \rightarrow \text{Interacción}$$

En consecuencia el único vértice de la teoría es

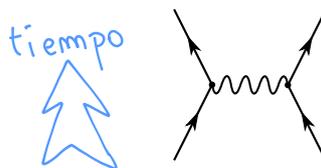


Ítem b

Para el proceso $e^- + e^+ \rightarrow e^- + e^+$ los diagramas a orden más bajo son e^2 y son

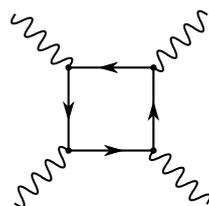


En cuanto al scattering de electrones, $e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$, el único diagrama es



Ítem c

Para el diagrama de $\gamma + \gamma \rightarrow \gamma + \gamma$ el diagrama a orden más bajo permitiendo loops que yo encuentro es



y como tiene cuatro vértices es de orden e^4 .

Problema 4

Ítem a

El lagrangiano es

$$\mathcal{L} = \left[\sum_i \bar{\Psi}_i (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_i) \Psi_i - q_i \bar{\Psi}_i \gamma^\mu \Psi_i A_\mu \right] - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

donde i recorre todos los campos de Dirac que hayan presentes.

Ítem b

El lagrangiano puede reescribirse como

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{\Psi} (i\Gamma^\mu \partial_\mu - \mathcal{M}) \Psi - \bar{\Psi} \Gamma^\mu \mathcal{Q} \Psi A_\mu - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \\ &= \bar{\Psi} (i\Gamma^\mu [\partial_\mu - \mathcal{Q} A_\mu] - \mathcal{M}) \Psi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \end{aligned}$$

donde ahora $\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{bmatrix}$, $\mathcal{M} = \begin{bmatrix} m_1 & \\ & m_2 \end{bmatrix}$, $\Gamma^\mu = \begin{bmatrix} \gamma^\mu & \\ & \gamma^\mu \end{bmatrix}$ y $\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} q_1 & \\ & q_2 \end{bmatrix}$. Como se puede ver la derivada covariante es

$$D_\mu \equiv \partial_\mu - \mathcal{Q} A_\mu.$$

La transformación de gauge

$$\text{Gauge transformation} \rightarrow \begin{cases} \Psi_1 \rightarrow \Psi'_1 = e^{i\alpha_1 q_1} \Psi_1 \\ \Psi_2 \rightarrow \Psi'_2 = e^{i\alpha_2 q_2} \Psi_2 \end{cases}$$

ahora puede expresarse según

$$\begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{bmatrix}' = \exp \left(i \begin{bmatrix} q_1 & \\ & q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{bmatrix}$$

o bien

$$\Psi' = e^{i\mathcal{Q}\alpha} \Psi.$$

Ítem c

El motivo por el cual la transformación es $\mathbf{U}(1)$ tiene que ver con que

$$e^{i\mathcal{Q}\alpha} = e^{\text{generadores de } \mathbf{U}(1)} \neq e^{\text{generadores de } \mathbf{SU}(2)}.$$

En este caso simplemente se trata de una representación de $\mathbf{U}(1)$ de dimensión 2.

Guía 7B - Teorías de gauge (caso no abeliano)

Problema 1

Ítem a

Cuando la única constante no nula es β esta transformación es

$$\begin{aligned}\Phi' &= e^{-i\beta\mathbf{1}}\Phi \\ &= \begin{bmatrix} e^{-i\beta} & \\ & e^{-i\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_A \\ \phi_B \end{bmatrix} .\end{aligned}$$

Cuando la única constante no nula es α^3 se obtiene

$$\begin{aligned}\Phi' &= e^{-i\alpha^3 \cdot \frac{\sigma_3}{2}} \Phi \\ &= \exp\left(-i\alpha^3 \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} \phi_A \\ \phi_B \end{bmatrix} \\ &\vdots\end{aligned}$$

Box 14 - La posición de los índices

Dado un objeto con dos o más índices, por ejemplo $F^{\mu\nu}$, entonces en general vale que

$$F^{\mu\nu} \neq F_{\mu\nu} \neq F^\mu{}_\nu \neq F_\mu{}^\nu \neq F_\nu{}^\mu \neq F^\nu{}_\mu \neq F_\nu^\mu .$$

Para evidenciar esto consideremos un ejemplito. Supongamos que F es un “cuadritensor” tal que

$$F^{\mu\nu} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} .$$

Entonces

$$\left\{ \begin{array}{l} F^\mu{}_\nu = F^{\mu\rho}\eta_{\rho\nu} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \\ F_\mu{}^\nu = F^{\rho\nu}\eta_{\mu\rho} \sim \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \\ F_{\mu\nu} = F^{\rho\sigma}\eta_{\mu\rho}\eta_{\sigma\nu} \sim \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \\ F^{\nu\mu} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \\ F^\nu{}_\mu \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \\ F_\nu{}^\mu \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \\ F_\nu^\mu \text{ en general no está bien definido} \end{array} \right.$$

Consideremos ahora otro ejemplo con un tensor en un espacio euclídeo, en el que $\eta_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ y en consecuencia no hay diferencia entre un índice arriba o uno abajo. Supongamos un tensor T tal que

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} .$$

Entonces

$$\left\{ \begin{array}{l} T^{ij} = T^i{}_j = T_i{}^j = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \\ T^{ji} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \\ T_j^i \text{ en general no está bien definido} \end{array} \right.$$

Lo anterior vale para cualquier tipo de índice (de Minkowski, euclídeo, espinorial, etc). Como se puede ver, en general, los índices no conmutan, y además T_j^i no está bien definido. Únicamente en el caso de índices simétricos se los

puede conmutar y

$$T_j^i \text{ está bien definido } \iff T_j^i = T_j^i$$

Un ejemplo en donde **definitivamente está mal** es en las constantes de estructura de un álgebra. Por ejemplo

$$[T_a, T_b] = \begin{cases} if_{abc}T^c & \rightarrow \text{Está bien} \\ if_{ab}^cT_c & \rightarrow \text{Está bien} \\ if_{abc}T_c & \rightarrow \text{No es tan lindo, pero está perfecto} \\ if_{ab}^cT_c & \rightarrow \text{MAL!} \end{cases}$$

Para entender por qué el último de los anteriores está mal se puede hacer lo mismo que antes con el $F^{\mu\nu}$ pero ahora usando una métrica $\eta^{\mu\nu} \sim \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}$.

Ítem b

Con $\beta = 0$ la transformación es

$$\Phi \rightarrow \Phi' = \exp(-i\alpha(x) \cdot T) \Phi \rightarrow \text{Transformación de } \mathbf{SU}(N)$$

con $\alpha_a(x)$ parámetros de la transformación y T_a los generadores de $\mathbf{SU}(N)$ (con $T_a = \frac{\sigma_a}{2}$ se obtiene $\mathbf{SU}(2)$). El objetivo es encontrar cómo transforma $A_\mu = A^a_\mu T_a$ tal que esta transformación sea una simetría del lagrangiano. Para ello se define

$$D_\mu \stackrel{\text{def}}{=} \partial_\mu + igA_\mu \rightarrow \text{Consigna}$$

donde $A_\mu \equiv A^a_\mu T_a$ tal que

$$D_\mu \Phi \rightarrow (D_\mu \Phi)' = \Omega D_\mu \Phi. \rightarrow \text{Según teórica}$$

Si esto es así entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' &= (D_\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi)' - m^2 \Phi^\dagger \Phi' \\ \left. \begin{aligned} (D_\mu \Phi)' &= \Omega D_\mu \Phi \\ \Phi' &= \Omega \Phi \end{aligned} \right\} \rightarrow &= (D_\mu \Phi)^\dagger \Omega^\dagger \Omega (D_\mu \Phi) - m^2 \Phi^\dagger \Omega^\dagger \Omega \Phi \\ \Omega^{-1} = \Omega^\dagger \rightarrow &= (D_\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi) - m^2 \Phi^\dagger \Phi \\ &= \mathcal{L}, \end{aligned}$$

es decir que la transformación es una simetría de \mathcal{L} .

Entonces

$$\begin{aligned} (D_\mu \Phi)' &= ([\partial_\mu + igA_\mu] \Phi)' \\ &= [\partial_\mu + igA_\mu]' \Phi' \\ &= [\partial_\mu + igA'_\mu] \Phi' \\ &= [\partial_\mu + igA'_\mu] \Omega \Phi \\ &= (\partial_\mu \Omega + \Omega \partial_\mu + igA'_\mu \Omega) \Phi. \end{aligned}$$

Igualando esto a “la forma que queremos que tenga”, i.e. usando $(D_\mu \Phi)' = \Omega D_\mu \Phi$, esto es

$$\underbrace{\Omega (\cancel{\partial_\mu} + igA_\mu) \Phi}_{\Omega D_\mu \Phi} = \underbrace{(\partial_\mu \Omega + \Omega \cancel{\partial_\mu} + igA'_\mu \Omega) \Phi}_{(D_\mu \Phi)'}$$

de donde se puede despejar la ley de transformación de los campos de gauge

$$A'_\mu = \Omega A_\mu \Omega^{-1} - \frac{1}{ig} (\partial_\mu \Omega) \Omega^{-1} \rightarrow \text{Esto es lo que buscábamos}$$

Notación más compacta $\rightarrow = \Omega \left(A_\mu - \frac{1}{ig} \overleftarrow{\partial}_\mu \right) \Omega^{-1}$

$$(\partial_\mu)^\dagger = \overleftarrow{\partial}_\mu \rightarrow = \Omega \frac{(D_\mu)^\dagger}{-ig} \Omega^{-1}.$$

Ítem c

Para calcular el conmutador es conveniente aplicar el operador a un campo Φ , esto es

$$\begin{aligned}
 G_{\mu\nu}\Phi &= \frac{1}{ig} [D_\mu, D_\nu] \Phi \\
 D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu \rightarrow &= \frac{1}{ig} [\partial_\mu + igA_\mu, \partial_\nu + igA_\nu] \Phi \\
 &= \frac{[\cancel{\partial_\mu, \partial_\nu}] \Phi + ig([\partial_\mu, A_\nu] + [A_\mu, \partial_\nu]) \Phi - g^2 [A_\mu, A_\nu] \Phi}{ig} \\
 &= [\partial_\mu, A_\nu] \Phi + [A_\mu, \partial_\nu] \Phi + ig [A_\mu, A_\nu] \Phi \\
 &= \partial_\mu (A_\nu \Phi) - A_\nu \partial_\mu \Phi + A_\mu \partial_\nu \Phi - \partial_\nu (A_\mu \Phi) + ig [A_\mu, A_\nu] \Phi \\
 &= \partial_\mu A_\nu \Phi + \cancel{A_\nu \partial_\mu \Phi} - \cancel{A_\nu \partial_\mu \Phi} + \cancel{A_\mu \partial_\nu \Phi} - \partial_\nu A_\mu \Phi - \cancel{A_\mu \partial_\nu \Phi} + ig [A_\mu, A_\nu] \Phi \\
 &= (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig [A_\mu, A_\nu]) \Phi \\
 &= (F_{\mu\nu} + ig [A_\mu, A_\nu]) \Phi.
 \end{aligned}$$

Entonces

$$G_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} + ig [A_\mu, A_\nu].$$

En cuanto a la forma en que transforma G , se sabe que $D_\mu \rightarrow \Omega D_\mu \Omega^{-1}$. Entonces

$$\begin{aligned}
 G'_{\mu\nu} &= \frac{1}{ig} [D'_\mu, D'_\nu] \\
 D'_\mu = \Omega D_\mu \Omega^{-1} \rightarrow &= \frac{1}{ig} [\Omega D_\mu \Omega^{-1}, \Omega D_\nu \Omega^{-1}] \\
 &= \Omega \frac{1}{ig} [D_\mu, D_\nu] \Omega^{-1} \\
 &= \Omega G_{\mu\nu} \Omega^{-1}. \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

Notar que el enunciado dice que $G'_{\mu\nu} = \Omega^{-1} G_{\mu\nu} \Omega$ lo cual claramente es distinto a lo obtenido. Según las consultas que hice a los docentes del curso, es un error de enunciado.

Ítem d

Sabiendo cómo transforma G , entonces

$$\begin{aligned}
 [\text{Tr}(G_{\mu\nu} G^{\mu\nu})]' &= \text{Tr}(G'_{\mu\nu} G'^{\mu\nu}) \\
 G' = \Omega G \Omega^{-1} \rightarrow &= \text{Tr}(\Omega G_{\mu\nu} \Omega^{-1} \Omega G^{\mu\nu} \Omega^{-1}) \\
 \text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA) \rightarrow &= \text{Tr}(G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} \Omega^{-1} \Omega) \\
 &= \text{Tr}(G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}).
 \end{aligned}$$

Esto demuestra que $\text{Tr}(G_{\mu\nu} G^{\mu\nu})$ es invariante de gauge.

Problema 2

Ítem a

Supongo que pide que se calcule explícitamente el término de interacción en el lagrangiano. En tal caso

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{\text{YM}} &= (D^\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi) - m^2 \Phi^\dagger \Phi - \frac{1}{2} \text{Tr}(G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}) \\
 &= \Phi^\dagger \overleftarrow{D}^\mu D_\mu \Phi - m^2 \Phi^\dagger \Phi - \frac{1}{2} \text{Tr}(G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}) \\
 &= \Phi^\dagger \left(\overleftarrow{\partial}^\mu - ig A^\mu \right) (\partial_\mu + ig A_\mu) \Phi - m^2 \Phi^\dagger \Phi - \frac{1}{2} \text{Tr}(G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}) \\
 &= \Phi^\dagger \left(\overleftarrow{\partial}^\mu \partial_\mu + g^2 A^\mu A_\mu + ig \left(\overleftarrow{\partial}^\mu A_\mu - A_\mu \partial^\mu \right) \right) \Phi - m^2 \Phi^\dagger \Phi - \frac{1}{2} \text{Tr}(G_{\mu\nu} G^{\mu\nu})
 \end{aligned}$$

donde se puede ver claramente que los términos que acoplan a los campos Φ y A son

$$\text{Términos de interacción} \rightarrow \left\{ \begin{aligned} &g^2 \Phi^\dagger A^\mu A_\mu \Phi \\ &ig \Phi^\dagger \left(\overleftarrow{\partial}^\mu A_\mu - A_\mu \partial^\mu \right) \Phi \end{aligned} \right.$$

Recordar que $A_\mu = A^a{}_\mu T_a$ siendo $T \in \mathfrak{su}(N)$ los generadores de $\mathbf{SU}(N)$. En el caso particular de $\mathbf{SU}(2)$ se tiene que

$$T_a \in \text{gen} \{ \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \} \rightarrow \text{Para } \mathbf{SU}(2)$$

con σ_i las matrices de Pauli. Convencionalmente $A^a{}_\mu$ se define de modo tal que

$$T_a = \frac{\sigma_a}{2}.$$

Entonces uno de los términos es

$$\begin{aligned} \Phi^\dagger \overleftarrow{\partial}^\mu A_\mu \Phi &= \Phi^\dagger \overleftarrow{\partial}^\mu A^a{}_\mu T_a \Phi \\ &= \partial^\mu \Phi^\dagger \left(A^1{}_\mu \frac{\sigma_1}{2} + A^2{}_\mu \frac{\sigma_2}{2} + A^3{}_\mu \frac{\sigma_3}{2} \right) \Phi \\ &= \frac{1}{2} [\partial^\mu \phi_A^* \quad \partial^\mu \phi_B^*] \left(A^1{}_\mu \begin{bmatrix} & 1 \\ -1 & \end{bmatrix} + A^2{}_\mu \begin{bmatrix} & -i \\ i & \end{bmatrix} + A^3{}_\mu \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \phi_A \\ \phi_B \end{bmatrix} \\ &= A^1{}_\mu \frac{\partial^\mu \phi_A^* \phi_B - \partial^\mu \phi_B^* \phi_A}{2} + A^2{}_\mu \frac{-i \partial^\mu \phi_A^* \phi_B + i \partial^\mu \phi_B^* \phi_A}{2} + A^3{}_\mu \frac{\partial^\mu \phi_A^* \phi_A - \partial^\mu \phi_B^* \phi_B}{2}. \end{aligned}$$

El cálculo de los demás términos es lo mismo.

En el caso de los campos de Dirac lo único que cambia es $\phi^* \rightarrow \bar{\psi}$. Es decir

$$\Phi^\dagger \overleftarrow{\partial}^\mu A_\mu \Phi \rightarrow \bar{\Psi} \overleftarrow{\partial}^\mu A_\mu \Psi = \dots = A^1{}_\mu \frac{\partial^\mu \bar{\psi}_A \psi_B - \partial^\mu \bar{\psi}_B \psi_A}{2} + \dots$$

Ítem b

Creo que se refiere a lo que hice en el problema 1 ítem c de la presente guía. En ese momento encontré que

$$G_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} + ig [A_\mu, A_\nu]$$

donde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ es el tensor de Maxwell.

Ítem c

El término cinético para los campos de gauge es

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{kinetic gauge}} &= -\frac{1}{2} \text{Tr} (G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}) \\ G_{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{ig} [D_\mu, D_\nu] &\rightarrow = -\frac{1}{2} \text{Tr} \left(-\frac{1}{g^2} [D_\mu, D_\nu] [D^\mu, D^\nu] \right). \end{aligned}$$

Usando $D_\mu \stackrel{\text{def}}{=} \partial_\mu + ig A_\mu$ cada uno de estos conmutadores es

$$\begin{aligned} [D_\mu, D_\nu] &= (\partial_\mu + ig A_\mu) (\partial_\nu + ig A_\nu) - (\partial_\nu + ig A_\nu) (\partial_\mu + ig A_\mu) \\ &= \cancel{\partial_\mu \partial_\nu} - \cancel{g^2 A_\mu A_\nu} + ig (\partial_\mu A_\nu + A_\mu \partial_\nu) - \cancel{\partial_\nu \partial_\mu} + \cancel{g^2 A_\nu A_\mu} - ig (\partial_\nu A_\mu + A_\nu \partial_\mu) \\ A_\mu \partial_\nu \equiv A_\mu \partial_\nu 1 \equiv 0 &\rightarrow = ig (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \\ &= ig F_{\mu\nu} \end{aligned}$$

por lo que

$$[D_\mu, D_\nu] [D^\mu, D^\nu] = -g^2 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}.$$

Finalmente

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{kinetic gauge}} &= -\frac{1}{2} \text{Tr} \left(-\frac{1}{g^2} (-g^2 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \right) \\ &= -\frac{1}{2} \text{Tr} ((\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)) \\ A_\mu = A^a{}_\mu T_a &\rightarrow = -\frac{1}{2} \text{Tr} ((\partial_\mu A^a{}_\nu - \partial_\nu A^a{}_\mu) T_a T_b (\partial^\mu A^{b\nu} - \partial^\nu A^{b\mu})) \\ &= -\frac{1}{2} (\partial_\mu A^a{}_\nu - \partial_\nu A^a{}_\mu) (\partial^\mu A^{b\nu} - \partial^\nu A^{b\mu}) \underbrace{\text{Tr} (T_a T_b)}_{\frac{1}{2} \delta_{ab}} \\ &= -\frac{1}{4} (\partial_\mu A^a{}_\nu - \partial_\nu A^a{}_\mu) (\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu}) \\ &= -\frac{1}{4} F^a{}_{\mu\nu} F_a{}^{\mu\nu} \end{aligned}$$

donde he usado la identidad de que dados T_a y T_b que satisfacen el álgebra $\mathfrak{su}(N)$ entonces $\text{Tr} (T_a T_b) = \frac{1}{2} \delta_{ab}$, ver en [este link](#).

Ítem d

Continuando el cálculo del ítem previo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{kinetic gauge}} &= -\frac{1}{2} \text{Tr} ((F_{\mu\nu} + ig [A_\mu, A_\nu]) (F^{\mu\nu} + ig [A^\mu, A^\nu])) \\ &= -\frac{1}{2} \text{Tr} (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - g^2 [A_\mu, A_\nu] [A^\mu, A^\nu] + ig (F_{\mu\nu} [A^\mu, A^\nu] + [A_\mu, A_\nu] F^{\mu\nu})). \end{aligned}$$

Los términos cuadráticos en g son

$$\begin{aligned} [A_\mu, A_\nu] [A^\mu, A^\nu] &= A^a{}_\mu A^b{}_\nu A^{c\mu} A^{d\nu} [T_a, T_b] [T_c, T_d] \\ [T_a, T_b] = if_{abc} T_c \rightarrow &= -A^a{}_\mu A^b{}_\nu A^{c\mu} A^{d\nu} f_{abe} f_{cdf} T_e T_f \end{aligned}$$

y no creo que se pueda avanzar más sin especificar las constantes de estructura f (es decir, sin elegir el valor de N en $\text{SU}(N)$).

En cuanto a los términos lineales en g considero primero

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} [A^\mu, A^\nu] &= (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) [A^\mu, A^\nu] \\ &= A^{b\mu} A^{c\nu} (\partial_\mu A^a{}_\nu - \partial_\nu A^a{}_\mu) T_a [T_b, T_c] \\ &= iA^{b\mu} A^{c\nu} (\partial_\mu A^a{}_\nu - \partial_\nu A^a{}_\mu) f_{bcd} T_a T_d. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} [A^\mu, A^\nu] + [A_\mu, A_\nu] F^{\mu\nu} &= iA^{b\mu} A^{c\nu} (\partial_\mu A^a{}_\nu - \partial_\nu A^a{}_\mu) f_{bcd} T_a T_d + \dots \\ &\quad \dots - iA^b{}_\mu A^c{}_\nu (\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu}) f_{bcd} T_d T_a \\ &= iA^{b\mu} A^{c\nu} (\partial_\mu A^a{}_\nu - \partial_\nu A^a{}_\mu) f_{bcd} [T_a, T_d]. \end{aligned}$$

No sé si se puede seguir más allá de esta expresión... Pero no creo que sea relevante.

Problema 3

De acuerdo con lo visto en uno de los problemas previos los campos de gauge transforman según

$$A'_\mu = \Omega A_\mu \Omega^{-1} - \frac{1}{ig} (\partial_\mu \Omega) \Omega^{-1} \rightarrow \text{Se encontró antes}$$

o bien usando $A_\mu = A^a{}_\mu T_a$ se tiene que

$$\begin{aligned} (A^a{}_\mu T_a)' &= A^a{}_\mu \Omega T_a \Omega^{-1} - \frac{1}{ig} (\partial_\mu \Omega) \Omega^{-1} \\ \Omega = \exp(-ig\alpha^a(x) T_a) \rightarrow &= A^a{}_\mu (1 - ig\alpha^b T_b) T_a (1 + ig\alpha^c T_c) - \frac{-ig}{ig} \partial_\mu \alpha^a T_a (1 - ig\alpha^b T_b) (1 + ig\alpha^c T_c) \\ &= A^a{}_\mu (T_a + ig\alpha^c T_a T_c - ig\alpha^b T_b T_a) + \partial_\mu \alpha^a T_a + \mathcal{O}(\alpha^2) \\ [T_a, T_b] = if_{abc} T_c \rightarrow &= A^a{}_\mu (T_a + ig\alpha^b [T_a, T_b]) + \partial_\mu \alpha^a T_a + \mathcal{O}(\alpha^2) \\ &= A^a{}_\mu (T_a - g\alpha^b f_{abc} T_c) + \partial_\mu \alpha^a T_a + \mathcal{O}(\alpha^2) \\ &= A^a{}_\mu T_a - g\alpha^b A^a{}_\mu f_{abc} T_c + \partial_\mu \alpha^a T_a + \mathcal{O}(\alpha^2) \\ &= (A^a{}_\mu T_a + \partial_\mu \alpha^a - gA^c{}_\mu \alpha^b f_{cba}) T_a + \mathcal{O}(\alpha^2) \end{aligned}$$

Se encontró, entonces, que $(A^a{}_\mu T_a)' = (A^a{}_\mu T_a + \partial_\mu \alpha^a - gA^c{}_\mu \alpha^b f_{cba}) T_a + \mathcal{O}(\alpha^2)$. Considerando el hecho de que $(A^a{}_\mu T_a)' = (A^a{}_\mu)' T_a$ y tirando los términos $\mathcal{O}(\alpha^2)$ se puede eliminar T_a a ambos lados de la igualdad y entonces

$$(A^a{}_\mu)' = A^a{}_\mu + \partial_\mu \alpha^a - gA^c{}_\mu \alpha^b f_{cba}.$$

Usando que f_{abc} es totalmente antisimétrico para $\mathfrak{su}(N)$ entonces $f_{cba} = -f_{abc}$ y

$$(A^a{}_\mu)' = A^a{}_\mu + \partial_\mu \alpha^a + gA^c{}_\mu \alpha^b f^a{}_{bc}.$$

Nótese que $f^a{}_{bc} = f_{abc}$, en este caso es sólo un detalle estético.

PREGUNTA 1 - Formula diferente en clase

Acabo de llegar a que

$$(A^a_\mu)' = A^a_\mu + \partial_\mu \alpha^a + g A^c_\mu \alpha^b f^a_{bc}.$$

Sin embargo en clase teórica nos quedó distinto el signo del último término... Según Griffiths eq. (10.83) parecería ser con un "+". En el Halzen eq. (14.38) le quedó $(A^a_\mu)' = A^a_\mu - \partial_\mu \alpha^a - g A^c_\mu \alpha^b f^a_{bc}$ pero me parece que tiene que ver con cómo definió la transformación ya que tiene $D_\mu = \partial_\mu - ig A_\mu$. No sé...

Si estás usando estos resueltos y querés hacerle un feedback a Alf sobre esta duda, le podés enviar un mensaje a través de [este link](#). Sabé que Alf estará agradecido.

Problema 4

Es lo que ya hice. Hice todo para $SU(N)$.

Problema 5

Ítem a

Esto es

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= \overbrace{\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu}^{F_{\mu\nu}} + ig [A_\mu, A_\nu] \leftarrow \text{Esto lo sabíamos de antes} \\ A_\mu = \mathbf{W}_\mu \cdot \mathbf{T} &\rightarrow = \partial_\mu \mathbf{W}_\nu \cdot \mathbf{T} - \partial_\nu \mathbf{W}_\mu \cdot \mathbf{T} + ig W^a_\mu W^b_\nu [T_a, T_b] \\ [T_a, T_b] = if_{abc} T_c &\rightarrow = (\partial_\mu \mathbf{W}_\nu - \partial_\nu \mathbf{W}_\mu) \cdot \mathbf{T} - g W^a_\mu W^b_\nu f_{abc} T_c \\ \left. \begin{aligned} f_{abc} = \varepsilon_{abc} \\ T_a = \frac{\sigma_a}{2} \end{aligned} \right\} \text{ para } SU(2) &\rightarrow = (\partial_\mu \mathbf{W}_\nu - \partial_\nu \mathbf{W}_\mu) \cdot \frac{\sigma}{2} - g W^a_\mu W^b_\nu \varepsilon_{abc} \frac{\sigma_c}{2} \\ \varepsilon_{ijk} \text{ antisimétrico} &\rightarrow = (\partial_\mu \mathbf{W}_\nu - \partial_\nu \mathbf{W}_\mu) \cdot \frac{\sigma}{2} - g W^a_\mu W^b_\nu \varepsilon^{cab} \frac{\sigma_c}{2} \\ (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = a^j b^k \varepsilon_{ijk} &\rightarrow = (\partial_\mu \mathbf{W}_\nu - \partial_\nu \mathbf{W}_\mu - g \mathbf{W}_\mu \times \mathbf{W}_\nu) \cdot \frac{\sigma}{2}. \end{aligned}$$

Recordando ahora que $G_{\mu\nu} = G^a_{\mu\nu} T_a \equiv \mathbf{G}_{\mu\nu} \cdot \mathbf{T}$ y que $\mathbf{T} = \frac{\sigma}{2}$ para $SU(2)$ entonces

$$\mathbf{G}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{W}_\nu - \partial_\nu \mathbf{W}_\mu - g \mathbf{W}_\mu \times \mathbf{W}_\nu.$$

Ítem b

En un problema previo se encontró que $(A^a_\mu)' = A^a_\mu + \partial_\mu \alpha^a + g A^c_\mu \alpha^b f^a_{bc}$ lo cual, especializado en $SU(3)$, es

$$\begin{aligned} (W^a_\mu)' &= W^a_\mu + \partial_\mu \alpha^a + g W^c_\mu \alpha^b \varepsilon^a_{bc} \leftarrow f_{abc} = \varepsilon_{abc} \text{ en } SU(3) \\ \varepsilon_{abc} \text{ es antisimétrico} &\rightarrow = W^a_\mu + \partial_\mu \alpha^a + g W^c_\mu \alpha^b \varepsilon^{bca} \\ &= W^a_\mu + \partial_\mu \alpha^a + g (\mathbf{W} \times \boldsymbol{\alpha})^a \end{aligned}$$

por lo tanto, usando notación de vectores, esto es

$$(\mathbf{W}_\mu)' = \mathbf{W}_\mu + \partial_\mu \boldsymbol{\alpha} + g \mathbf{W} \times \boldsymbol{\alpha}.$$

Ítem c

PREGUNTA 2 - No tengo idea cómo hacer este...

Aparentemente, en base a lo que pregunté, hay que usar $A'_\mu = \Omega A_\mu \Omega^{-1} - \frac{1}{ig} (\partial_\mu \Omega) \Omega^{-1}$ pero poniendo el Ω que corresponde a una rotación. Lo que no entiendo es el hecho de que $\Omega \in SU(N)$ mientras que las matrices de rotación son de $SO(3)$.

Si estás usando estos resueltos y querés hacerle un feedback a Alf sobre esta duda, le podés enviar un mensaje a través de [este link](#). Sabé que Alf estará agradecido.

Problema 6

Ítem a

La transformación del problema 1 es

$$\Phi \rightarrow \Phi' = e^{-ig(\beta + \alpha^a T_a)} \Phi. \rightarrow \text{Problema 1}$$

Si $\alpha^a \equiv 0 \forall a \in \{1, \dots, 2N - 1\}$ entonces

$$\Phi \rightarrow \Phi' = e^{-ig\beta \mathbf{1}} \Phi$$

y en este caso $e^{-ig\beta \mathbf{1}}$ es una representación de $N \times N$ de $\mathbf{U}(1)$. Obsérvese que

$$e^{-ig\beta \mathbf{1}} = \mathbf{1} e^{-ig\beta}$$

por lo tanto

$$\Phi' = e^{-ig\beta} \Phi$$

donde es evidente que la transformación $\in \mathbf{U}(1)$.

En cuanto a la transformación con $\beta = 0$ ya se vio que ésta es una representación fundamental de $\mathbf{SU}(N)$ (siempre y cuando $T_a \in \mathfrak{su}(N)$ y sean matrices de $N \times N$). Entonces, como conclusión, me animaría a anotar

$$\mathbf{U}(N) \sim \mathbf{U}(1) \otimes \mathbf{SU}(N) \sim e^{\mathfrak{u}(1) \oplus \mathfrak{su}(N)}. \rightarrow \text{WARNING: fruit content}$$

Ítem b

Queremos encontrar la forma en que deben transformar A y B tal que $(D_\mu \Phi)' = \Omega D_\mu \Phi$ donde $\Omega = \exp(-ig(\beta \mathbf{1} + \alpha^a T_a))$, de modo tal que el lagrangiano quede invariante. Para encontrar las leyes de transformación se considera en primer lugar

$$\begin{aligned} (D_\mu \Phi)' &= D'_\mu \Phi' \\ \left. \begin{aligned} D_\mu &\equiv \partial_\mu + g_B B_\mu + g_A A^a{}_\mu T_a \\ \Phi' &= \Omega \Phi \end{aligned} \right\} \rightarrow &= (\partial_\mu + g_B (B_\mu)' + g_A (A^a{}_\mu)' T_a) \Omega \Phi \\ &= (\partial_\mu \Omega + \Omega \partial_\mu + g_B (B_\mu)' \Omega + g_A (A^a{}_\mu)' T_a \Omega) \Phi \end{aligned}$$

y a continuación se lo reemplaza en $(D_\mu \Phi)' = \Omega D_\mu \Phi$ para obtener

$$\underbrace{(\partial_\mu \Omega + \cancel{\Omega \partial_\mu} + g_B (B_\mu)' \Omega + g_A (A^a{}_\mu)' T_a \Omega)}_{(D_\mu \Phi)'} = \Omega \underbrace{(\cancel{\partial_\mu} + g_B B_\mu + g_A A^a{}_\mu T_a)}_{D_\mu} \Phi.$$

Como esto debe valer $\forall \Phi$ entonces se los puede cancelar y queda

$$g_B (B_\mu)' + g_A (A^a{}_\mu)' T_a = (\partial_\mu \Omega) \Omega^{-1} + g_B B_\mu + g_A A^a{}_\mu T_a \Omega^{-1}.$$

PREGUNTA 3 - No sé cómo terminar este problema

No veo cómo separar la transformación de los campos...

Si estás usando estos resueltos y querés hacerle un feedback a Alf sobre esta duda, le podés enviar un mensaje a través de [este link](#). Sabé que Alf estará agradecido.

Guía 8 - Un mundo sin Higgs, Sector QCD

Box 15 - Criterio de sumación de índices de Einstein y notación

De acá en adelante (o sea, en las guías previas esto no aplica ya que no me acuerdo cómo lo hice) voy a usar la siguiente interpretación de índices repetidos

$$\begin{cases} A_i B_i, A^i B^i & \rightarrow \text{No se suman, } i \text{ está fijo} \\ A_i B^i, A^i B_i & \rightarrow \text{Se suman} \end{cases}$$

es decir que cuando los índices están “opuestos” hay implícita una suma entre ellos (sean índices de Minkowski, espinoriales, o cualquier tipo de índices) y cuando están en la misma posición NO hay suma implícita.

Problema 1

Ítem a (cómo compilar el lagrangiano de QCD + vértices)

Análisis de objetos en el lagrangiano de QCD De acuerdo con la consigna

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \sum_{f \in \{\text{flavors}\}} \overline{\Psi}_f(x) i \gamma^\mu \left(\partial_\mu + i \frac{g_s}{2} G^a_\mu T_a \right) \Psi_f(x) - \frac{1}{4} G^a_{\mu\nu} G_a^{\mu\nu}$$

donde los generadores T_a satisfacen $[T_a, T_b] = i f_{ab}^c T_c$ (o sea que $T^a = \lambda^a$ con esta convención). El índice f recorre el sabor (up, down, charm, etc.), mientras que cada uno de estos “espinores Ψ_f ” está compuesto a su vez por otros tres espinores:

$$\Psi_f = \begin{bmatrix} \Psi_{fr} \\ \Psi_{fg} \\ \Psi_{fb} \end{bmatrix} \rightarrow \text{Sabor } i \in \{u, d, s, c, t, b\}$$

donde $\Psi_{fr}, \Psi_{fg}, \Psi_{fb} \in$ espinores de Dirac de 4 componentes. O sea, Ψ_f es un triplete de espinores de color. Entonces cada uno de estos bichos tiene en total los siguientes índices

$$\Psi_{fcs} \in \mathbb{C} \quad \text{con} \quad \begin{cases} f \in \{\text{up, down, strange, charm, top, bottom}\} & \text{flavor} \\ c \in \{\text{red, green, blue}\} & \text{color} \\ s \in \{1, 2, 3, 4\} & \text{spinor} \end{cases},$$

es decir

$$\Psi_{\text{índice de sabor, índice de color, índice espinorial}} \in \mathbb{C}$$

Dicho esto, la simetría $\mathbf{SU}(3)$ se aplica sobre los índices de color. Es decir que la transformación $\mathbf{SU}(3)$ local es de la forma

$$\Psi'_{fCs} = \sum_{c \in \{r, g, b\}} \Omega_{Cc} \Psi_{fcs} \rightarrow \mathbf{SU}(3) \text{ de color}$$

con $\Omega_{Cc} \in \mathbb{C}$ las componentes de una matriz $\Omega \in \mathbf{SU}(3)$. Normalmente lo anterior se denota en forma compacta

$$\Psi'_f = \Omega \Psi_f. \rightarrow \text{Notación compacta}$$

Solución del problema Todo lo anterior era innecesario para resolver el problema, pero no está de más analizarlo al menos una vez en la vida. En cuanto a los términos de interacción, tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{QCD}} &= \sum_{f \in \{\text{flavors}\}} \overline{\Psi}_f(x) i \gamma^\mu \left(\partial_\mu + i \frac{g_s}{2} G^a_\mu T_a \right) \Psi_f(x) - \frac{1}{4} G^a_{\mu\nu} G_a^{\mu\nu} \\ &= \sum_{f \in \{\text{flavors}\}} \overline{\Psi}_f i \gamma^\mu \partial_\mu \Psi_f + i \frac{g_s}{2} \overline{\Psi}_f T_a \Psi_f G^a_\mu - \frac{1}{4} G^a_{\mu\nu} G_a^{\mu\nu} \end{aligned}$$

donde reconocemos

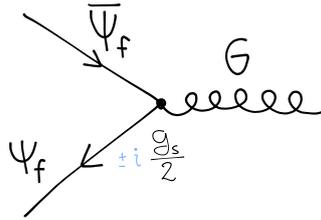
$$\begin{cases} \overline{\Psi}_f i \gamma^\mu \partial_\mu \Psi_f & \rightarrow \text{Propagación de quarks} \\ i \frac{g_s}{2} \overline{\Psi}_f T_a \Psi_f G^a_\mu & \rightarrow \text{Interacción quarks-gluones} \\ - \frac{1}{4} G^a_{\mu\nu} G_a^{\mu\nu} & \rightarrow \text{Propagación gluones + interacción gluones-gluones} \end{cases}.$$

Para desmenuzar la interacción entre quarks y gluones (lo que pide la consigna) desarrollemos este término

$$\begin{aligned}
 i \frac{g_s}{2} \bar{\Psi}_f T_a \Psi_f G^a_\mu &= i \frac{g_s}{2} \bar{\Psi}_f \overbrace{(\lambda_1 G^1_\mu + \lambda_2 G^2_\mu + \dots + \lambda_8 G^8_\mu)}^{\text{Suma implícita sobre } a} \Psi_f \leftarrow \text{No se suma sobre } f, \text{ está fijo} \\
 &= i \frac{g_s}{2} \begin{bmatrix} \bar{\Psi}_{fr} & \bar{\Psi}_{fg} & \bar{\Psi}_{fb} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} G^1_\mu + \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} G^2_\mu + \dots + \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} G^8_\mu \right) \begin{bmatrix} \Psi_{fr} \\ \Psi_{fg} \\ \Psi_{fb} \end{bmatrix} \\
 &= i \frac{g_s}{2} ((\bar{\Psi}_{fr} \Psi_{fg} + \bar{\Psi}_{fg} \Psi_{fr}) G^1_\mu + i (\bar{\Psi}_{fg} \Psi_{fr} - \bar{\Psi}_{fr} \Psi_{fg}) G^2_\mu + \dots).
 \end{aligned}$$

Como se puede ver el gluón de tipo 1 (o sea G^1_μ) mezcla los colores rojo y verde y el quark de tipo 2 también pero con otra fase. Obsérvese que como f está fijo (no hay suma implícita sobre f) entonces los gluones no mezclan sabores, sólo colores.

En términos de diagramas de Feynman los vértices entre quarks y gluones serán de la forma



donde Ψ_f es cualquiera de los tripletes de color de quarks, G es alguno de los campos de gluones, y el “orden del vértice” puede ser $\pm i \frac{g_s}{2}$ donde lo que está en este color va cambiando según cuál de todos los cientos de términos uno considere. Nuevamente se ve que NO hay mezcla de sabores por parte de la interacción quarks-gluones ya que f es el mismo para el “campo entrante” $\bar{\Psi}_f$ y para el “campo saliente” Ψ_f .

Ítem b

La simetría de la cual habla la consigna es

$$\Psi_f \rightarrow e^{i\theta_f} \Psi_f$$

con

$$\begin{cases} \theta_f \in \mathbb{R} & \text{O sea que es una transformación } \mathbf{U}(1) \\ \partial_\mu \theta_f \stackrel{\text{def}}{=} 0 & \text{O sea que es global (no local)} \end{cases}$$

Es trivial ver que bajo estas condiciones $\mathcal{L}'_{\text{QCD}} = \mathcal{L}_{\text{QCD}}$, es decir que es una transformación de simetría del modelo.

En su momento la cantidad conservada se interpretó como la carga eléctrica. Sin embargo, sabiendo que la carga eléctrica está asociada a la simetría $\mathbf{U}(1)$ local de la parte electrodébil, supongo que la carga conservada en este caso es la “carga de cada tipo de quark”, si es que esto existe. Es decir

$$Q_f = \#\text{quarks sabor } f + \#\text{antiquarks sabor } f \rightarrow \text{Simetría } \mathbf{U}(1) \text{ global}$$

Alternativa para lo mismo En lo anterior se dijo que la transformación era $\Psi_f \rightarrow e^{i\theta_f} \Psi_f$, con $f \in \{u, d, s, c, t, b\}$. O sea que hay 6 transformaciones $\mathbf{U}(1)$, una para cada f . Lo que sigue es trivial, pero puede ayudar a clarificar algunos conceptos. Véase que todo lo anterior es equivalente a decir que

$$\begin{bmatrix} \Psi_u \\ \Psi_d \\ \Psi_c \\ \Psi_s \\ \Psi_t \\ \Psi_b \end{bmatrix}' = \underbrace{\begin{bmatrix} e^{i\theta_u} & & & & & \\ & e^{i\theta_d} & & & & \\ & & e^{i\theta_c} & & & \\ & & & e^{i\theta_s} & & \\ & & & & e^{i\theta_t} & \\ & & & & & e^{i\theta_b} \end{bmatrix}}_{\in \mathbf{U}(1)^6} \begin{bmatrix} \Psi_u \\ \Psi_d \\ \Psi_c \\ \Psi_s \\ \Psi_t \\ \Psi_b \end{bmatrix} \rightarrow \text{Transformación } \underbrace{\mathbf{U}(1) \times \mathbf{U}(1) \times \dots \times \mathbf{U}(1)}_{6 \text{ veces}}$$

donde cada $\theta_f \in \mathbb{R}$ es completamente independiente de los demás. Es decir que se puede armar un “hexuplete” de sabor tal que el lagrangiano satisface esta simetría. Esto implica que la simetría global que estamos analizando es una simetría de tipo

$$\mathbf{U}(1)^6 = \mathbf{U}(1) \times \mathbf{U}(1) \times \mathbf{U}(1) \times \mathbf{U}(1) \times \mathbf{U}(1) \times \mathbf{U}(1)$$

o bien seis simetrías $\mathbf{U}(1)$ independientes.

Ítem c

Asumiendo que hice bien lo anterior, el primer proceso es posible ya que $u + \bar{u} \rightarrow d + \bar{d}$ tiene $\#_f = 0$ antes y después del proceso para todos los sabores f .

El segundo proceso, $u + \bar{d} \rightarrow d + \bar{u}$, tiene

$$\begin{cases} \#_u^{\text{inicial}} = 1 \\ \#_d^{\text{inicial}} = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \#_u^{\text{final}} = -1 \\ \#_d^{\text{final}} = 1 \end{cases}$$

y como es evidente se viola la conservación, así que no es un proceso posible.

El último proceso pareciera posible ya que $\#_u^{\text{inicial}} = \#_u^{\text{final}} = 0$, y para el $\#_{\text{gluones}}$ no hay una ley de conservación.

Problema 2

Ítem a

Véase que el lagrangiano de QCD se puede escribir en forma compacta

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{QCD}} &= \sum_{f \in \{\text{flavors}\}} \bar{\Psi}_f i \gamma^\mu \left(\partial_\mu + i \frac{g_s}{2} G_\mu^a T_a \right) \Psi_f - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu} \leftarrow \text{Forma no compacta} \\ &= \bar{\Xi} i \gamma^\mu D_\mu \Xi - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu} \leftarrow \text{Forma compacta} \end{aligned}$$

con $\Xi = \begin{bmatrix} \Psi_u \\ \Psi_d \\ \vdots \\ \Psi_b \end{bmatrix}$. Véase que este lagrangiano tiene simetría frente a la transformación

$$\Xi \rightarrow \Xi' = \mathcal{U} \Xi$$

con $\begin{cases} \mathcal{U} \in \mathbf{SU}(6) \\ \partial_\mu \mathcal{U} \equiv 0 \end{cases}$. Es decir que tiene simetría $\mathbf{SU}(6)$ global de sabor. Esto es siempre y cuando no haya masa (o bien si todos los quarks tuvieran la misma masa).

Ítem b

De acuerdo con las masas de los quarks supongo que podríamos reconocer dos simetrías $\mathbf{SU}(3)$ de sabor que son aproximadas: una es el $\mathbf{SU}(3)$ de sabor de las primeras guías de la materia formada por $\Psi_{\text{sabores livianos}} = \begin{bmatrix} \Psi_u \\ \Psi_d \\ \Psi_s \end{bmatrix}$ y la

otra es la formada por $\Psi_{\text{sabores pesados}} = \begin{bmatrix} \Psi_c \\ \Psi_b \\ \Psi_t \end{bmatrix}$. Aparentemente, según pregunté en la práctica, la única simetría aproximada es la de los “sabores livianos” puesto que la de “sabores pesados” está más allá de un umbral de energía mágico para el cual no recuerdo qué pasaba.

Ítem c

La simetría de isospín es la que llamé de “sabores livianos”.

Ítem d

Subítem a Supongo que la consigna quiso decir $\#_{\text{de quarks sabor } f} - \#_{\text{de antiquarks sabor } f} = \text{constante}$. En este caso, esto vale independientemente de las masas.

Subítem b La simetría de isospín total (o sea el módulo del isospín) existirá siempre que se pueda considerar $m_u \approx m_d \approx m_s$.

Subítem c La conservación de la proyección I_3 de isospín existirá siempre que se conserve el número de quarks de cada especie. O sea, vale siempre.

Subítem d La conservación de extrañeza tiene que ver con $\#_{\text{quarks } s} - \#_{\text{antiquarks } s} = 0$, cosa que ocurre siempre. Creo.

Guía 8 - Un mundo sin Higgs, sector electrodébil

Problema 1

El lagrangiano del cual habla la consigna es

$$\mathcal{L} = \sum_f \bar{\Psi}_f i\gamma^\mu D_\mu \Psi_f$$

Sumación de Einstein $\rightarrow = \bar{\Psi}^f i\gamma^\mu D_\mu \Psi_f$

donde $f \in \{\text{quarks}\} \cup \{\text{leptones}\}$, $D_\mu \equiv \partial_\mu$ cuando no se gaugea nada, y $\Psi^f \equiv \Psi_f$. Hago la distinción para usar el criterio de sumación de Einstein, que se aplica sólo a “índices cruzados” (ver box 15). Es decir

$$\text{Notación} \rightarrow \begin{cases} \bar{\Psi}^f i\gamma^\mu D_\mu \Psi_f & \rightarrow \text{Suma implícita sobre } f \\ \bar{\Psi}_f i\gamma^\mu D_\mu \Psi_f & \rightarrow f \text{ tiene un valor fijo} \end{cases}.$$

Ítem a

Para que sea más evidente la importancia de masa nula, voy a considerar el lagrangiano de Dirac libre con masa, y luego la haré nula. Esto es

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Dirac}} &= \bar{\Psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi \\ &= \bar{\Psi} i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - \bar{\Psi} m \Psi \\ \Psi = \Psi_L + \Psi_R = P_L \Psi + P_R \Psi &\rightarrow = \bar{\Psi}_L i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi_L + \bar{\Psi}_R i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi_R + \bar{\Psi}_L i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi_R + \bar{\Psi}_R i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi_L + \dots \\ &\quad \dots - \bar{\Psi}_L m \Psi_L - \bar{\Psi}_R m \Psi_R - \bar{\Psi}_L m \Psi_R - \bar{\Psi}_R m \Psi_L. \end{aligned}$$

Usando ahora que $\begin{cases} P_L = \frac{1 - \gamma^5}{2} \\ P_R = \frac{1 + \gamma^5}{2} \end{cases}$, las relaciones de conmutación de las γ y la definición de $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$ se puede mostrar que

algunos términos del lagrangiano anterior son idénticamente nulos. Considérese por ejemplo

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_L m \Psi_L &= \Psi_L^\dagger \gamma^0 m \Psi_L \\ &= \Psi^\dagger P_L^\dagger \gamma^0 m P_L \Psi \\ &= \Psi^\dagger \left(\frac{1 - \gamma^5}{2} \right)^\dagger \gamma^0 m \left(\frac{1 - \gamma^5}{2} \right) \Psi \\ \left. \begin{aligned} (\gamma^5)^\dagger &= \gamma^5 \\ \{\gamma^5, \gamma^\mu\} &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow &= \Psi^\dagger \gamma^0 \frac{1 + \gamma^5}{2} m \frac{1 - \gamma^5}{2} \Psi \\ &= \frac{\bar{\Psi} (1 + \gamma^5 - \gamma^5 - \gamma^5 \gamma^5) \Psi}{4} \\ (\gamma^5)^2 = 1 &\rightarrow = 0. \end{aligned}$$

Lo mismo ocurrirá para $\bar{\Psi}_R m \Psi_R$. En cuanto a $\bar{\Psi}_L i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi_R$ véase que

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_L i\gamma^\mu D_\mu \Psi_R &= \Psi^\dagger P_L^\dagger \gamma^0 i\gamma^\mu \partial_\mu P_R \Psi \\ \left. \begin{aligned} P_L &= \frac{1 - \gamma^5}{2} \\ \{\gamma^5, \gamma^0\} &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow &= \Psi^\dagger \gamma^0 P_R i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi \\ \left. \begin{aligned} P_R &= \frac{1 + \gamma^5}{2} \\ \{\gamma^5, \gamma^\mu\} &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow &= \bar{\Psi} i\gamma^\mu P_L P_R \partial_\mu \Psi \\ P_L P_R &\equiv 0 \rightarrow \equiv 0 \end{aligned}$$

y de manera completamente análoga $\bar{\Psi}_R i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi_L \equiv 0$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Dirac}} &= \bar{\Psi} (i\gamma^\mu D_\mu - m) \Psi \\ &\equiv \bar{\Psi}_L i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi_L + \bar{\Psi}_R i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi_R - \bar{\Psi}_L m \Psi_R - \bar{\Psi}_R m \Psi_L \\ &= \mathcal{L}_{\text{Dirac}} \text{ sin masa } \{P_L \Psi\} + \mathcal{L}_{\text{Dirac}} \text{ sin masa } \{P_R \Psi\} - \bar{\Psi} m \Psi. \end{aligned}$$

Ahora es evidente que si $m = 0$ entonces Ψ_L y Ψ_R tienen una dinámica que es completamente independiente.

Ítem b

Me parece que lo de “agrupar de a pares” se refiere a lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} &= \sum_f \bar{\Psi}_f i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi_f \leftarrow \text{Este es el de antes con } f \in \{\text{quarks}\} \cup \{\text{leptones}\} \\
 &\equiv \sum_f (\mathcal{L}_{\text{Dirac sin masa}} \{P_L \Psi_f\} + \mathcal{L}_{\text{Dirac sin masa}} \{P_R \Psi_f\}) \\
 &= \sum_f (\bar{\Psi}_{fL} i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi_{fL} + \bar{\Psi}_{fR} i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi_{fR}) \\
 &= \underbrace{\bar{e}_L i\gamma^\mu \partial_\mu e_L + \bar{\nu}_{eL} i\gamma^\mu \partial_\mu \nu_{eL}}_{\Psi_{\text{electrón}}} + \underbrace{\bar{e}_R i\gamma^\mu \partial_\mu e_R + \bar{\nu}_{eR} i\gamma^\mu \partial_\mu \nu_{eR}}_{\Psi_{\text{neutrino electrónico}}} + \text{los otros pares} \\
 &= \underbrace{\bar{e}_L i\gamma^\mu \partial_\mu e_L + \bar{\nu}_{eL} i\gamma^\mu \partial_\mu \nu_{eL}}_{\text{Componentes left}} + \underbrace{\bar{e}_R i\gamma^\mu \partial_\mu e_R + \bar{\nu}_{eR} i\gamma^\mu \partial_\mu \nu_{eR}}_{\text{Componentes right}} + \text{los otros pares} \\
 &= \begin{bmatrix} \bar{\nu}_{eL} & \bar{e}_L \end{bmatrix} i\gamma^\mu \partial_\mu \begin{bmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\nu}_{eR} & \bar{e}_R \end{bmatrix} i\gamma^\mu \partial_\mu \begin{bmatrix} \nu_{eR} \\ e_R \end{bmatrix} + \text{los otros pares} \\
 &= \mathcal{L}_{\text{Dirac sin masa}} \left\{ P_L \begin{bmatrix} \nu_e \\ e \end{bmatrix} \right\} + \mathcal{L}_{\text{Dirac sin masa}} \left\{ P_R \begin{bmatrix} \nu_e \\ e \end{bmatrix} \right\} + \text{los otros pares}
 \end{aligned}$$

donde “los otros pares” son otros términos agrupados en forma idéntica, es decir $\begin{bmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{bmatrix}$ para los leptones restantes y $\begin{bmatrix} u \\ d \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} c \\ s \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} t \\ b \end{bmatrix}$ para los quarks.

Véase ahora que $\mathcal{L}_{\text{Dirac sin masa}} \left\{ \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{bmatrix} \right\}$, con Ψ_1 y Ψ_2 dos espinores de Dirac, es simétrico ante transformaciones de la forma

$$\begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{bmatrix}' = e^{-i\left(\frac{g'}{2}Y\beta + \frac{g_w}{2}T_a\alpha^a\right)} \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{U}(1) \times \mathbf{SU}(2) \text{ globales}$$

donde $g', g_w \in \mathbb{R}$, $Y = \begin{bmatrix} Y_1 & 0 \\ 0 & Y_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ y $T_a = \sigma_a$ satisfacen el álgebra $\mathfrak{su}(2)$ (o sea $[\sigma_a, \sigma_b] = i\epsilon_{ijc}\sigma_c$). Es decir que la parte $\mathbf{U}(1)$ de la transformación está asociada a β y la parte $\mathbf{SU}(2)$ está asociada a α^a . Obsérvese que $\partial_\mu \beta = \partial_\mu \alpha^a = 0$, es decir que las simetrías son globales (en este ejercicio, más adelante se harán locales).

Box 16 - Sobre los grupos de simetría que estamos usando en la teoría electrodébil

Véase que

$$e^{i\alpha} \in \mathbf{U}(1)$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$ el “parámetro de la transformación”, que

$$\exp\left(i \begin{bmatrix} \alpha & \\ & \beta \end{bmatrix}\right) \in \mathbf{U}(1) \times \mathbf{U}(1)$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ dos parámetros independientes de transformación, y que

$$e^{iT_a\alpha^a} \in \mathbf{U}(2)$$

con $\alpha^a \in \mathbb{R}$ tres parámetros de transformación. Obsérvese además que (quizá es obvio)

$$\exp\left(i \begin{bmatrix} \alpha & \\ & \alpha \end{bmatrix}\right) \begin{cases} \in \mathbf{U}(1) \\ \notin \mathbf{U}(1) \times \mathbf{U}(1) \end{cases}.$$

Entonces véase que la simetría de gauge del lagrangiano electrodébil, i.e. $e^{-i\left(\frac{g'}{2}Y\beta + \frac{g_w}{2}T_a\alpha^a\right)}$, es tal que

$$e^{-i\left(\frac{g'}{2}Y\beta + \frac{g_w}{2}T_a\alpha^a\right)} = \exp\left(-i\left(\frac{g'}{2} \begin{bmatrix} y_1 & \\ & y_2 \end{bmatrix} \beta + \frac{g_w}{2}T_a\alpha^a\right)\right) \in \mathbf{U}(1) \times \mathbf{SU}(2).$$

El motivo de esto es que si bien las y_1 y y_2 son distintas, el parámetro de transformación es β mientras que y_1, y_2 son constantes.

Obsérvese, por otro lado, que

$$\exp \left(-i \left(g \begin{bmatrix} y_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \beta_1 + g \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y_2 \end{bmatrix} \beta_2 + g' T_a \alpha^a \right) \right) \in \mathbf{U}(1) \times \mathbf{U}(1) \times \mathbf{SU}(2)$$

ya que en este caso tenemos dos parámetros de transformación β_1 y β_2 .

Para verificar que el lagrangiano es simétrico ante esta transformación se procede del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_{\text{Dirac sin masa}} \left\{ \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{bmatrix} \right\} &= \overline{\begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{bmatrix}} \Omega^\dagger i \gamma^\mu \partial_\mu \left(\Omega \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{bmatrix} \right) \\ &= \overline{\begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{bmatrix}} i \gamma^\mu \underbrace{\Omega^\dagger \Omega}_1 \partial_\mu \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{bmatrix} \\ &= \mathcal{L}_{\text{Dirac sin masa}} \left\{ \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

donde se usó que $[\Omega, \gamma^\mu] = 0$ (porque γ^μ es “un número” para Ω) y que $\partial_\mu \Omega = 0$.

Volviendo al “lagrangiano del modelo estándar” se vio al comienzo del problema que éste se podía escribir como una suma de lagrangianos de Dirac sin masa para dobletes left y right por separado para cada generación, es decir

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^3 \left(\mathcal{L}_{\text{Sin masa}}^{\text{Dirac}} \left\{ P_L \begin{bmatrix} \Psi_{uQ}^i \\ \Psi_{dQ}^i \end{bmatrix} \right\} + \mathcal{L}_{\text{Sin masa}}^{\text{Dirac}} \left\{ P_R \begin{bmatrix} \Psi_{uQ}^i \\ \Psi_{dQ}^i \end{bmatrix} \right\} + \mathcal{L}_{\text{Sin masa}}^{\text{Dirac}} \left\{ P_L \begin{bmatrix} \Psi_{uL}^i \\ \Psi_{dL}^i \end{bmatrix} \right\} + \mathcal{L}_{\text{Sin masa}}^{\text{Dirac}} \left\{ P_R \begin{bmatrix} \Psi_{uL}^i \\ \Psi_{dL}^i \end{bmatrix} \right\} \right)$$

donde el índice i recorre las tres generaciones de materia del modelo estándar, y los subíndices significan

$$\begin{cases} uQ & \rightarrow \text{up-type quark} \\ dQ & \rightarrow \text{down-type quark} \\ uL & \rightarrow \text{up-type lepton} \\ dL & \rightarrow \text{down-type lepton} \end{cases}$$

Es decir:

		Three Generations of Matter (Fermions)			
		I	II	III	
up-type quarks →		$2.4 \text{ MeV}/c^2$ $\frac{2}{3}$ u up	$1.27 \text{ GeV}/c^2$ $\frac{2}{3}$ c charm	$171.2 \text{ GeV}/c^2$ $\frac{2}{3}$ t top	0 1 γ photon
down-type quarks →	Quarks	$4.8 \text{ MeV}/c^2$ $-\frac{1}{3}$ d down	$104 \text{ MeV}/c^2$ $-\frac{1}{3}$ s strange	$4.2 \text{ GeV}/c^2$ $-\frac{1}{3}$ b bottom	0 1 g gluon
up-type leptons →		$<2.2 \text{ eV}/c^2$ 0 ν_e electron neutrino	$<0.17 \text{ MeV}/c^2$ 0 ν_μ muon neutrino	$<15.5 \text{ MeV}/c^2$ 0 ν_τ tau neutrino	0 1 2 Z⁰ Z boson
down-type leptons →	Leptons	$0.511 \text{ MeV}/c^2$ -1 $\frac{1}{2}$ e electron	$105.7 \text{ MeV}/c^2$ -1 $\frac{1}{2}$ μ muon	$1.777 \text{ GeV}/c^2$ -1 $\frac{1}{2}$ τ tau	$80.4 \text{ GeV}/c^2$ -1 1 W[±] W boson

Véase que como ningún campo tiene masa entonces todos los lagrangianos individuales son independientes unos de otros lo cual implica que cada uno satisface sus propias simetrías $\mathbf{U}(1) \times \mathbf{SU}(2)$ con sus propios parámetros independientes. En particular las partes left y right de cada doblete pueden tener cualesquiera valores distintos para g', g_w e $Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}$.

Problema 2

En este problema se gaugean las simetrías del problema 1 de “la forma correcta” que funciona para recrear los experimentos que se observan.

Considérese el lagrangiano correspondiente a un único doblete:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{EW} \text{ de un doblete} &= \mathcal{L}_{\text{sin masa}}^{\text{Dirac}} \left\{ \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{bmatrix} \right\} \\ \text{Se mostró en problema 1)a) } \rightarrow &\equiv \mathcal{L}_{\text{sin masa}}^{\text{Dirac}} \left\{ P_L \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{bmatrix} \right\} + \mathcal{L}_{\text{sin masa}}^{\text{Dirac}} \left\{ P_R \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{bmatrix} \right\} \\ \Xi \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{bmatrix} \rightarrow &= \bar{\Xi}_L i\gamma^\mu \partial_\mu \Xi_L + \bar{\Xi}_R i\gamma^\mu \partial_\mu \Xi_R \end{aligned}$$

donde $\Xi \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{bmatrix}$ con Ψ_1 algún *up-type quark* o *up-type lepton* (neutrino) y Ψ_2 el correspondiente *down-type whatever*. Como se vio, Ξ_L y Ξ_R tienen una dinámica que es completamente independiente gracias a que no tienen masa. Ahora se hace el gaugeo electrodébil

$$\text{Electroweak gauge } \rightarrow \partial_\mu \rightarrow \begin{cases} D_{L\mu} = \partial_\mu + i\frac{g'}{2} Y_L B_\mu + i\frac{g_w}{2} T_a W^a_\mu \\ D_{R\mu} = \partial_\mu + i\frac{g'}{2} Y_R B_\mu \end{cases}$$

tal que el lagrangiano ahora es

$$\mathcal{L}_{EW} \text{ de un doblete gaugeado} = \underbrace{\bar{\Xi}_L i\gamma^\mu D_{L\mu} \Xi_L}_{\text{Left}} + \underbrace{\bar{\Xi}_R i\gamma^\mu D_{R\mu} \Xi_R}_{\text{Right}}$$

con $g', g_w \in \mathbb{R}$,

$$\text{Hypercharge } \rightarrow \begin{cases} Y_L = y_L \mathbb{1} \equiv \begin{bmatrix} y_L & \\ & y_L \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \\ Y_R = \begin{bmatrix} y_{R1} & \\ & y_{R2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

y $T_a = \sigma_a$ son los generadores usuales de **SU**(2) (o sea que σ_a son las matrices de Pauli). Reemplazando y desarrollando se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{EW} \text{ de un doblete gaugeado} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{\Psi}_{1L} & \bar{\Psi}_{2L} \end{bmatrix} i\gamma^\mu \left(\partial_\mu + i\frac{g'}{2} y_L \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} B_\mu + i\frac{g_w}{2} T_a W^a_\mu \right)}_{\text{Left part}} \begin{bmatrix} \Psi_{1L} \\ \Psi_{2L} \end{bmatrix} + \dots \\ &\dots + \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{\Psi}_{1R} & \bar{\Psi}_{2R} \end{bmatrix} i\gamma^\mu \left(\partial_\mu + i\frac{g'}{2} \begin{bmatrix} y_{R1} & \\ & y_{R2} \end{bmatrix} B_\mu \right)}_{\text{Right part}} \begin{bmatrix} \Psi_{1R} \\ \Psi_{2R} \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{\Psi}_1 & \bar{\Psi}_2 \end{bmatrix} i\gamma^\mu \partial_\mu \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{bmatrix}}_{\text{Propagación}} - \underbrace{\frac{g' y_L}{2} (\bar{\Psi}_{1L} \gamma^\mu \Psi_{1L} + \bar{\Psi}_{2L} \gamma^\mu \Psi_{2L}) B_\mu}_{\text{Acoplamiento de componentes left a } B_\mu} + \dots \\ &\dots - \underbrace{\frac{g'}{2} (y_{R1} \bar{\Psi}_{1R} \gamma^\mu \Psi_{1R} + y_{R2} \bar{\Psi}_{2R} \gamma^\mu \Psi_{2R}) B_\mu}_{\text{Acoplamiento discriminado de componentes right a } B_\mu} + \dots \\ &\dots - \underbrace{\frac{g_w}{2} \begin{bmatrix} \bar{\Psi}_{1L} & \bar{\Psi}_{2L} \end{bmatrix} \gamma^\mu (\sigma_1 W^1_\mu + \sigma_2 W^2_\mu + \sigma_3 W^3_\mu)}_{\mathcal{L}_{\text{left} \leftrightarrow W_\mu}, \text{ acoplamiento de componentes left a bosones SU}(2)} \begin{bmatrix} \Psi_{1L} \\ \Psi_{2L} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Obsérvese que las componentes right sólo se acoplan a B_μ que “es parecido” al campo eléctrico A_μ , mientras que las componentes left se acoplan a todo. Aún se puede desarrollar más el último término que acopla las componentes left a bosones **SU**(2) reemplazando las matrices σ_i por su expresión típica. Esto es

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{left} \leftrightarrow W_\mu} &\stackrel{\text{def}}{=} -\frac{g_w}{2} \begin{bmatrix} \bar{\Psi}_{1L} & \bar{\Psi}_{2L} \end{bmatrix} \gamma^\mu (\sigma_1 W^1_\mu + \sigma_2 W^2_\mu + \sigma_3 W^3_\mu) \begin{bmatrix} \Psi_{1L} \\ \Psi_{2L} \end{bmatrix} \\ \sigma_i = \dots \rightarrow &= -\frac{g_w}{2} \left(\begin{bmatrix} \bar{\Psi}_{1L} \gamma^\mu \Psi_{2L} + \bar{\Psi}_{2L} \gamma^\mu \Psi_{1L} \end{bmatrix} W^1_\mu + i \begin{bmatrix} \bar{\Psi}_{2L} \gamma^\mu \Psi_{1L} - \bar{\Psi}_{1L} \gamma^\mu \Psi_{2L} \end{bmatrix} W^2_\mu + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \begin{bmatrix} \bar{\Psi}_{1L} \gamma^\mu \Psi_{1L} - \bar{\Psi}_{2L} \gamma^\mu \Psi_{2L} \end{bmatrix} W^3_\mu \right). \end{aligned}$$

El W^3 es el que “es parecido” a Z mientras que los W^1 y W^2 se transforman en los W^\pm .

Problema 3

Ítem a

Los términos cinéticos para los campos de gauge del sector electrodébil (o sea los W_μ) se obtienen del lagrangiano para los campos de gauge “libres”¹

$$\mathcal{L}_{\text{free electroweak gauge fields}} = -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{8}\text{Tr}(W_{\mu\nu}W^{\mu\nu})$$

donde

$$\begin{cases} B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \\ W_{\mu\nu} = W^a_{\mu\nu}T_a \end{cases} \quad W^a_{\mu\nu} \sim \mathbf{W}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{W}_\nu - \partial_\nu \mathbf{W}_\mu - g\mathbf{W}_\mu \times \mathbf{W}_\nu$$

y $\mathbf{W}_\mu = W^a_\mu$ son “vectores” de tres componentes para $a \in \{1, 2, 3\}$ [Halzen and Martin, 2008, p. 328]. Además $T_a = \lambda_a$ son los generadores de $\mathbf{SU}(3)$, las matrices de Gell-Mann. Por otro lado, de acuerdo con la consigna,

$$\text{Consigna} \rightarrow \begin{cases} B_\mu = A_\mu \cos \theta - Z_\mu \sin \theta \\ W^3_\mu = A_\mu \sin \theta + Z_\mu \cos \theta \end{cases}$$

y ahora la idea es reemplazar B_μ y W^3_μ en el lagrangiano y ver que los términos cinéticos para A_μ y Z_μ son los mismos. Para el primer término del lagrangiano se tiene que

$$\begin{aligned} B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} &= (\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu)(\partial^\mu B^\nu - \partial^\nu B^\mu) \\ &= (\partial_\mu A_\nu \cos - \partial_\mu Z_\nu \sin - \partial_\nu A_\mu \cos + \partial_\nu Z_\mu \sin)(\partial^\mu A^\nu \cos - \partial^\mu Z^\nu \sin - \partial^\nu A^\mu \cos + \partial^\nu Z^\mu \sin) \\ &= ([\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu] \cos - [\partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu] \sin)([\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu] \cos - [\partial^\mu Z^\nu - \partial^\nu Z^\mu] \sin) \\ &= A_{\mu\nu}A^{\mu\nu} \cos^2 + Z_{\mu\nu}Z^{\mu\nu} \sin^2 - 2A_{\mu\nu}Z^{\mu\nu} \cos \sin \end{aligned}$$

donde $\begin{cases} A_{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \\ Z_{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu \end{cases}$. En cuanto al segundo término

$$\begin{aligned} \text{Tr}(W_{\mu\nu}W^{\mu\nu}) &= \text{Tr}(W^a_{\mu\nu}T_a W^{b\mu\nu}T_b) \\ &= W^a_{\mu\nu}W^{b\mu\nu} \text{Tr}(T_a T_b) \\ &= W^3_{\mu\nu}W^{3\mu\nu} \underbrace{\text{Tr}(T_3 T_3)}_{=2} + \text{otros términos que no interesan ahora} \\ &= 2W^3_{\mu\nu}W^{3\mu\nu} + \text{otras cosas} \end{aligned}$$

donde se ha seleccionado el término con $a = 3, b = 3$ pues aquí estarán los términos que generarán la propagación de W^3 . Usando $\mathbf{W}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{W}_\nu - \partial_\nu \mathbf{W}_\mu - g\mathbf{W}_\mu \times \mathbf{W}_\nu$ entonces

$$\begin{aligned} W^3_{\mu\nu}W^{3\mu\nu} &= (\partial_\mu W^3_\nu - \partial_\nu W^3_\mu + g\varepsilon_{3jk}W^j_\mu W^k_\nu)(\partial^\mu W^{3\nu} - \partial^\nu W^{3\mu} + g\varepsilon_{3jk}W^{j\mu}W^{k\nu}) \\ &= (\partial_\mu W^3_\nu - \partial_\nu W^3_\mu)(\partial^\mu W^{3\nu} - \partial^\nu W^{3\mu}) + \mathcal{O}(WWW) \end{aligned}$$

donde $\mathcal{O}(WWW)$ significa “cosas de orden cúbico en W ” que, dado el contexto, no es bueno notar usando $\mathcal{O}(W^3)$. Los términos $\mathcal{O}(WWW)$ no nos interesan en este momento pues son términos de interacción. Los términos de propagación son $\mathcal{O}(WW)$. Ahora se puede reemplazar $W^3_\mu = A_\mu \sin \theta + Z_\mu \cos \theta$ para obtener

$$\begin{aligned} W^3_{\mu\nu}W^{3\mu\nu} &= (\partial_\mu A_\nu \sin + \partial_\mu Z_\nu \cos - \partial_\nu A_\mu \sin - \partial_\nu Z_\mu \cos)(\partial^\mu A^\nu \sin + \partial^\mu Z^\nu \cos - \partial^\nu A^\mu \sin - \partial^\nu Z^\mu \cos) + \mathcal{O}(WWW) \\ &= (A_{\mu\nu} \sin + Z_{\mu\nu} \cos)(A^{\mu\nu} \sin + Z^{\mu\nu} \cos) + \mathcal{O}(WWW) \\ &= A_{\mu\nu}A^{\mu\nu} \sin^2 + Z_{\mu\nu}Z^{\mu\nu} \cos^2 + 2A_{\mu\nu}Z^{\mu\nu} \sin \cos + \mathcal{O}(WWW). \end{aligned}$$

(En lo anterior usé la notación $A_{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_\mu A_\nu$ y lo mismo para Z . Igual que antes.)

¹Libres entre comillas pues los campos de gauge interactúan entre ellos. Digo “libres” pues aquí no interactúan con los fermiones.

Reemplazando las expresiones obtenidas para $B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}$ y para $\text{Tr}(W_{\mu\nu}W^{\mu\nu})$ en el lagrangiano se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{free electroweak gauge fields}} &= -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{4}\text{Tr}(W_{\mu\nu}W^{\mu\nu}) \\ &= -\frac{1}{4}(A_{\mu\nu}A^{\mu\nu}\cos^2 + Z_{\mu\nu}Z^{\mu\nu}\sin^2 - 2A_{\mu\nu}Z^{\mu\nu}\cos\sin) + \dots \\ &\quad \dots - \frac{2}{8}(A_{\mu\nu}A^{\mu\nu}\sin^2 + Z_{\mu\nu}Z^{\mu\nu}\cos^2 + 2A_{\mu\nu}Z^{\mu\nu}\sin\cos + \mathcal{O}(WWW)) + \dots \\ &\quad \dots + \text{otros términos que ahora no nos interesan} \\ \cos^2 + \sin^2 = 1 \rightarrow &= -\frac{1}{4}(A_{\mu\nu}A^{\mu\nu} + Z_{\mu\nu}Z^{\mu\nu}) + \text{otros términos} \end{aligned}$$

y dadas las definiciones de $A_{\mu\nu}$ y $Z_{\mu\nu}$ se observa que los términos cinéticos para A y Z son los esperados, independientemente del θ_W .

Ítem b

El lagrangiano electrodébil, hasta donde sé, es

$$\mathcal{L}_{\text{EW}} = \sum_{\Psi \in \text{dobletes E.W.}} \left(\overline{\Psi}_L i\gamma^\mu D_L^{(\Psi)} \Psi_L + \overline{\Psi}_R i\gamma^\mu D_R^{(\Psi)} \Psi_R \right) - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{4}W^a{}_{\mu\nu}W_a{}^{\mu\nu}$$

donde

$$\begin{aligned} \text{dobletes E.W.} &= \left\{ \begin{bmatrix} \nu_e \\ e \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u \\ d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ s \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} t \\ b \end{bmatrix} \right\}, \\ \text{E.W. gauge} \rightarrow &\begin{cases} D_L^{(\Psi)}{}_\mu = \partial_\mu + ig' \frac{Y_L^{(\Psi)}}{2} B_\mu + i \frac{g_w}{2} T_a W^a{}_\mu \\ D_R^{(\Psi)}{}_\mu = \partial_\mu + ig' \frac{Y_R^{(\Psi)}}{2} B_\mu \end{cases} \end{aligned}$$

y los campos de gauge B y W son los mismos que en el ítem previo. Nótese que las constantes

$$Y_{L,R}^{(\Psi)} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \text{Hipergarcas}$$

dependen de cuál sea el doblete Ψ que estemos considerando (ver box 27).

Considérese un único término de la sumatoria del lagrangiano previo

$$\overline{\Psi}_L i\gamma^\mu D_L^{(\Psi)}{}_\mu \Psi_L + \overline{\Psi}_R i\gamma^\mu D_R^{(\Psi)} \Psi_R$$

con un Ψ fijo en los dobletes leptónicos (lo pide la consigna) que voy a denotar $\Psi \equiv \begin{bmatrix} \nu \\ \psi \end{bmatrix}$ donde ν es el neutrino y ψ el

“down-type lepton” correspondiente. Por ejemplo $\Psi = \begin{bmatrix} \nu_e \\ e \end{bmatrix}$. El término left es

$$\begin{aligned} \overline{\Psi}_L i\gamma^\mu D_L^{(\Psi)}{}_\mu \Psi_L &= [\overline{\nu} \quad \overline{\psi}]_L i\gamma^\mu \left(\partial_\mu + i \frac{g'}{2} Y_L^{(\Psi)} B_\mu + i \frac{g_w}{2} \sigma_a W^a{}_\mu \right) \begin{bmatrix} \nu \\ \psi \end{bmatrix}_L \\ &= -\frac{g'}{2} [\overline{\nu} \quad \overline{\psi}]_L \gamma^\mu \underbrace{\begin{bmatrix} y_{L\nu}^{(\Psi)} \\ y_{L\psi}^{(\Psi)} \end{bmatrix}}_{Y_L^{(\Psi)}} \begin{bmatrix} \nu \\ \psi \end{bmatrix}_L B_\mu - \frac{g_w}{2} [\overline{\nu} \quad \overline{\psi}]_L \gamma^\mu \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{\sigma_3} \begin{bmatrix} \nu \\ \psi \end{bmatrix}_L W^3{}_\mu + \text{otros términos} \\ &= \overline{\psi}_L \gamma^\mu \psi_L \left(-\frac{g'}{2} y_{L\psi}^{(\Psi)} B_\mu + \frac{g_w}{2} W^3{}_\mu \right) + \overline{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L \left(-\frac{g'}{2} y_{L\nu}^{(\Psi)} B_\mu - \frac{g_w}{2} W^3{}_\mu \right) + \text{otros términos} \end{aligned}$$

donde “otros términos” son cosas que ahora no interesan. Ahora se puede reemplazar $\begin{cases} B_\mu = A_\mu \cos\theta - Z_\mu \sin\theta \\ W^3{}_\mu = A_\mu \sin\theta + Z_\mu \cos\theta \end{cases}$ para obtener

$$\begin{aligned} \overline{\Psi}_L i\gamma^\mu D_L^{(\Psi)}{}_\mu \Psi_L &= \overline{\psi}_L \gamma^\mu \psi_L \left(-\frac{g'}{2} y_{L\psi}^{(\Psi)} [A_\mu \cos - Z_\mu \sin] + \frac{g_w}{2} [A_\mu \sin + Z_\mu \sin] \right) + \dots \\ &\quad \dots + \overline{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L \left(-\frac{g'}{2} y_{L\nu}^{(\Psi)} [A_\mu \cos - Z_\mu \sin] - \frac{g_w}{2} [A_\mu \sin + Z_\mu \sin] \right) + \text{otros términos} \\ &= \overline{\psi}_L \gamma^\mu \psi_L A_\mu \left(-\frac{g'}{2} y_{L\psi}^{(\Psi)} \cos + \frac{g_w}{2} \sin \right) + \overline{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L A_\mu \left(-\frac{g'}{2} y_{L\nu}^{(\Psi)} \cos - \frac{g_w}{2} \sin \right) + \text{otros términos.} \end{aligned}$$

Definiendo ahora

$$\text{Acoplamiento con } A_\mu \rightarrow \begin{cases} Q_\nu \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{g'}{2} y_{L\nu}^{(\Psi)} \cos -\frac{g_w}{2} \sin \\ Q_\psi \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{g'}{2} y_{L\psi}^{(\Psi)} \cos +\frac{g_w}{2} \sin \end{cases}$$

y planteando (consigna) que $\begin{cases} y_{L\nu}^{(\Psi)} = y_{L\psi}^{(\Psi)} = -1 \\ |e| = Q_\psi - Q_\nu \end{cases}$ entonces

$$\begin{aligned} |e| &= -\frac{g'}{2}(-1) \cos + \frac{g_w}{2} \sin - \left(-\frac{g'}{2}(-1) \cos - \frac{g_w}{2} \sin \right) \\ &= g_w \sin \theta_W. \end{aligned}$$

Nota En todo lo anterior hay mil cosas sobre convenciones de signos, qué se considera positivo, qué negativo, etc. Hoy lo pregunté en la clase de consultas y no me lo supieron terminar de aclarar. Y no son cosas triviales ni poco relevantes, ya que si un signo no es el correcto puede pasar que algo se anule y un campo quede desacoplado de algo, lo cual te haría recurrir a la materia. Yo encontré que todo lo anterior es compatible con lo que figura en [este link](#).

Ítem c

Teniendo $Q_\psi \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{g'}{2} y_{L\psi}^{(\Psi)} \cos + \frac{g_w}{2} \sin$ del ítem previo, sabiendo que $g_w \sin \theta_W = |e|$, reemplazando $y_{L\psi}^{(\Psi)} = -1$ y usando además que $Q_\psi = |e|$ entonces

$$|e| = \frac{g'}{2} \cos \theta_W + \frac{|e|}{2} \Rightarrow g' \cos \theta_W = |e|.$$

Dividiendo los dos resultados obtenidos es trivial ver que $\frac{g'}{g} = \tan \theta_W$.

Quarks Previamente se encontró que el acoplamiento con A_μ para los dobletes es $\begin{cases} Q_\nu \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{g'}{2} y_{L\nu}^{(\Psi)} \cos -\frac{g_w}{2} \sin \\ Q_\psi \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{g'}{2} y_{L\psi}^{(\Psi)} \cos +\frac{g_w}{2} \sin \end{cases}$ por lo tanto

$$\begin{cases} y_{L\nu}^{(\Psi)} = -\frac{2Q_\nu + g_w \sin \theta_W}{g' \cos \theta_W} \\ y_{L\psi}^{(\Psi)} = -\frac{2Q_\psi - g_w \sin \theta_W}{g' \cos \theta_W} \end{cases}.$$

Ahora hay que hacer la sustitución $\begin{cases} \nu \rightarrow \text{up-type quark} \\ \psi \rightarrow \text{down-type quark} \end{cases}$ y usar que $g' \cos \theta_W = g_w \sin \theta_W = |e|$ y entonces

$$\begin{cases} y_{L \text{ up-type quark}}^{(\Psi)} = -\frac{2Q_{\text{up-type}} + |e|}{|e|} \\ y_{L \text{ down-type quark}}^{(\Psi)} = -\frac{2Q_{\text{down-type}} - |e|}{|e|} \end{cases}.$$

Para los quark hay que usar lo siguiente

$$\text{Carga eléctrica de los quarks} \rightarrow \begin{cases} Q_{\text{up-type quark}} = -\frac{2}{3} |e| \\ Q_{\text{down-type quark}} = +\frac{1}{3} |e| \end{cases}$$

de modo tal que

$$\text{Verificado} \checkmark \rightarrow \begin{cases} y_{L \text{ up-type quark}} = \frac{1}{3} \\ y_{L \text{ down-type quark}} = \frac{1}{3} \end{cases}.$$

que coincide con [Wikipedia](#). Recordar que las Q son las del lagrangiano

$$\mathcal{L} = \dots + [\bar{u}_L \quad \bar{d}_L] \begin{bmatrix} Q_{\text{up-type quark}} \\ Q_{\text{down-type quark}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_L \\ d_L \end{bmatrix} A_\mu + \dots$$

Nótese que si bien parece raro que $Q_{\text{up-type quark}} < 0$ cuando sabemos que tienen carga positiva, esto es consistente con lo obtenido para los electrones $Q_\psi = |e| > 0$ cuando sabemos que tienen carga negativa. Como resumen de este problema se encontró que

$$\begin{aligned} Q_{\text{up-type lepton}} &= 0 & Q_{\text{up-type quark}} &= -\frac{2}{3}|e| & Y_L^{(\text{leptones})} &= \begin{bmatrix} -1 & \\ & -1 \end{bmatrix} & Y_L^{(\text{quarks})} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \\ & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \\ Q_{\text{down-type lepton}} &= |e| & Q_{\text{down-type quark}} &= \frac{1}{3}|e| \end{aligned}$$

donde los Q son los números que están en el lagrangiano acoplado con A_μ , es decir

$$\mathcal{L} = \dots + Q_{\text{down-type lepton}} \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu + \dots$$

Ítem d

Considérese el término right $\bar{\Psi}_R i \gamma^\mu D_R^{(\Psi)} \Psi_R$ con $D_R^{(\Psi)} = \partial_\mu + i \frac{g'}{2} Y_R^{(\Psi)} B_\mu$. En este caso

$$\bar{\Psi}_R i \gamma^\mu D_R^{(\Psi)} \Psi_R = -\frac{g'}{2} [\bar{\nu} \quad \bar{\psi}]_R \gamma^\mu \begin{bmatrix} y_{R\nu}^{(\Psi)} & \\ & y_{R\psi}^{(\Psi)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu \\ \psi \end{bmatrix}_R B_\mu + \text{otra cosa}$$

$$B_\mu = A_\mu \cos \theta - Z_\mu \sin \theta \rightarrow = \bar{\nu}_R \gamma^\mu \nu_R \left(-\frac{g'}{2} y_{R\nu}^{(\Psi)} \cos \theta_W \right) A_\mu + \bar{\psi}_R \gamma^\mu \psi_R \left(-\frac{g'}{2} y_{R\psi}^{(\Psi)} \cos \theta_W \right) A_\mu + \text{otras cosas.}$$

Debido a que los neutrinos right no se observan entonces o bien no existen o bien no interactúan con nada². En particular no interactúan con A_μ por lo tanto elegimos

$$y_{R\nu}^{(\Psi)} \equiv 0. \rightarrow \text{Neutrinos right no acoplan con } A_\mu$$

En cuanto al otro término usamos que las componentes left y right del electrón deben acoplar de forma simétrica con A_μ por lo tanto

$$Q_\psi = -\frac{g'}{2} y_{R\psi}^{(\Psi)} \cos \theta_W.$$

Pidiendo que $Q_\psi = |e|$ (se encontró antes) y sabiendo que $g' \cos \theta_W = |e|$ entonces, necesariamente,

$$y_{R\psi}^{(\Psi)} = -2. \checkmark$$

Estos resultados pueden consultarse en [Thomson, 2013, p. 421]. Además todo esto (y el ítem previo) es consistente con lo de [este link](#).

En ningún lugar se pide (creo) pero veamos cómo sería la hipercarga right para los quarks. Sólo hay que hacer, igual que antes, la sustitución $\nu \rightarrow \text{up-type quark}$ y $\psi \rightarrow \text{down-type quark}$ por lo que en el término de lagrangiano previo se reconoce

$$\begin{cases} Q_{\text{up-type quark}} = -\frac{g'}{2} y_{R\nu}^{(\Psi)} \cos \theta_W \\ Q_{\text{down-type quark}} = -\frac{g'}{2} y_{R\psi}^{(\Psi)} \cos \theta_W \end{cases}.$$

Usando ahora que $\begin{cases} Q_{\text{up-type quark}} = -\frac{2}{3}|e| \\ Q_{\text{down-type quark}} = \frac{1}{3}|e| \end{cases}$ y reemplazando $g' \cos \theta_W = |e|$ se encuentra que necesariamente

$$\text{Verificado} \checkmark \rightarrow \begin{cases} y_{R \text{ up-type quark}} = \frac{4}{3} \\ y_{R \text{ down-type quark}} = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

como bien dice [Wikipedia](#).

Box 17 - ¿Sabías que...

... En 2008, Kobayashi y Maskawa compartieron la mitad del premio Nobel de Física “por el descubrimiento del origen de la simetría rota que predice la existencia de al menos tres familias de quarks en la naturaleza”. Algunos

²Existe una teoría para la materia oscura que habla de los neutrinos estériles. La teoría plantea que los neutrinos estériles son los neutrinos right que no interactúan con nada pero que existen. Ver [este link](#).

físicos manifestaron su descontento sobre el hecho de que el comité de premio Nobel no premiara el trabajo de Cabibbo, cuyo trabajo previo estaba estrechamente relacionado con el de Kobayashi y Maskawa. Al ser preguntado en relación con el premio, Cabibbo prefirió no hacer comentarios.

[Wikipedia.](#)

Problema 4

Ver la resolución del problema 8 en donde desarrollé las interacciones de E.W., en página 70.

Problema 5 (Vértices E.W.)

Para poder dibujar los diagramas de Feynman solicitados debemos mirar

$$\mathcal{L}_{EW} = \sum_{\Psi \in \text{dobletes E.W.}} \left(\bar{\Psi}_L i \gamma^\mu D_L^{(\Psi)} \Psi_L + \bar{\Psi}_R i \gamma^\mu D_R^{(\Psi)} \Psi_R \right) - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^a W_a^{\mu\nu}$$

donde $\begin{cases} D_L^{(\Psi)}{}_\mu = \partial_\mu + i \frac{g'}{2} Y_L^{(\Psi)} B_\mu + i \frac{g_w}{2} T_a W_\mu^a \\ D_R^{(\Psi)}{}_\mu = \partial_\mu + i \frac{g'}{2} Y_R^{(\Psi)} B_\mu \end{cases}$ y $\Psi = \begin{bmatrix} \psi_u \\ \psi_d \end{bmatrix}$ es un doblete con ψ_u un *up-type fermion* y ψ_d un *down-type fermion*. En particular los primeros términos son los que acoplan los fermiones con los bosones. Estos términos los desarrollé al resolver el problema 8 de la presente guía (ver en la página 70). En dicha ocasión encontré que

$$\begin{aligned} \left[\bar{\Psi}_L i \gamma^\mu D_L^{(\Psi)} \Psi_L + \bar{\Psi}_R i \gamma^\mu D_R^{(\Psi)} \Psi_R \right]_{\text{leptón}} &= \bar{\Psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \Psi + e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu + \left(-\frac{g_w}{\sqrt{2}} \right) \bar{\nu}_L \gamma^\mu \psi_L W^+{}_\mu + \left(-\frac{g_w}{\sqrt{2}} \right) \bar{\psi}_L \gamma^\mu \nu_L W^-{}_\mu + \dots \\ &\dots + \left(-\frac{g' \sin \theta_W}{2} - \frac{g_w \cos \theta_W}{2} \right) \bar{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L Z_\mu + \dots \\ &\dots + \left(-\frac{g' \sin \theta_W}{2} + \frac{g_w \cos \theta_W}{2} \right) \bar{\psi}_L \gamma^\mu \psi_L Z_\mu + \dots \\ &\dots + (-g' \sin \theta_W) \bar{\psi}_R \gamma^\mu \psi_R Z_\mu \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \left[\bar{\Psi}_L i \gamma^\mu D_L^{(\Psi)} \Psi_L + \bar{\Psi}_R i \gamma^\mu D_R^{(\Psi)} \Psi_R \right]_{\text{quarks}} &= \bar{\Psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \Psi + \left(-\frac{2}{3} e \right) \bar{u} \gamma^\mu u A_\mu + \frac{e}{3} \bar{d} \gamma^\mu d A_\mu + \dots \\ &\dots + \left(-\frac{g_w}{\sqrt{2}} \right) \bar{u}_L \gamma^\mu d_L W^+{}_\mu + \left(-\frac{g_w}{\sqrt{2}} \right) \bar{d}_L \gamma^\mu u_L W^-{}_\mu + \dots \\ &\dots + \left(\frac{g' \sin \theta_W}{6} - \frac{g_w \cos \theta_W}{2} \right) \bar{u}_L \gamma^\mu u_L Z_\mu + \dots \\ &\dots + \left(\frac{g' \sin \theta_W}{6} + \frac{g_w \cos \theta_W}{2} \right) \bar{d}_L \gamma^\mu d_L Z_\mu + \dots \\ &\dots + \left(\frac{2g' \sin \theta_W}{3} \right) \bar{u}_R \gamma^\mu u_R Z_\mu + \left(-\frac{g' \sin \theta_W}{3} \right) \bar{d}_R \gamma^\mu d_R Z_\mu. \end{aligned}$$

A partir de estas expresiones ya son evidentes todos los vértices:

$\bar{\Psi}_L i \gamma^\mu D_L^{(\Psi)} \Psi_L + \bar{\Psi}_R i \gamma^\mu D_R^{(\Psi)} \Psi_R$ para leptones		
$e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu$	$\left(-\frac{g_w}{\sqrt{2}}\right) \bar{\nu}_L \gamma^\mu \psi_L W^+_\mu$	$\left(-\frac{g_w}{\sqrt{2}}\right) \bar{\psi}_L \gamma^\mu \nu_L W^-_\mu$
$\left(-\frac{g' \sin \theta_W}{2} - \frac{g_w \cos \theta_W}{2}\right) \bar{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L Z_\mu$	$(-g' \sin \theta_W) \bar{\psi}_R \gamma^\mu \psi_R Z_\mu$	$\left(-\frac{g' \sin \theta_W}{2} + \frac{g_w \cos \theta_W}{2}\right) \bar{\psi}_L \gamma^\mu \psi_L Z_\mu$
$\bar{\Psi}_L i \gamma^\mu D_L^{(\Psi)} \Psi_L + \bar{\Psi}_R i \gamma^\mu D_R^{(\Psi)} \Psi_R$ para quarks		
$\left(-\frac{2}{3}e\right) \bar{u} \gamma^\mu u A_\mu \quad / \quad \frac{e}{3} \bar{d} \gamma^\mu d A_\mu$	$\left(\frac{2g' \sin \theta_W}{3}\right) \bar{u}_R \gamma^\mu u_R Z_\mu \quad / \quad \left(-\frac{g' \sin \theta_W}{3}\right) \bar{d}_R \gamma^\mu d_R Z_\mu$	$\left(\frac{g' \sin \theta_W}{6} + \frac{g_w \cos \theta_W}{2}\right) \bar{d}_L \gamma^\mu d_L Z_\mu$
$\left(\frac{g' \sin \theta_W}{6} - \frac{g_w \cos \theta_W}{2}\right) \bar{u}_L \gamma^\mu u_L Z_\mu$	$\left(-\frac{g_w}{\sqrt{2}}\right) \bar{u}_L \gamma^\mu d_L W^+_\mu$	$\left(-\frac{g_w}{\sqrt{2}}\right) \bar{d}_L \gamma^\mu u_L W^-_\mu$

Problema 6

PREGUNTA 4 - Conservación de número leptónico usando teorema de Noether

La conservación del número leptónico tiene que ver con la simetría $U(1) \times U(1) \times U(1)$ global de los dobletes de quarks leptónicos, explícitamente la transformación de simetría es

$$\begin{bmatrix} \nu_e \\ e \\ \nu_\mu \\ \mu \\ \nu_\tau \\ \tau \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \nu_e \\ e \\ \nu_\mu \\ \mu \\ \nu_\tau \\ \tau \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} e^{i\alpha} & & & & & \\ & e^{i\beta} & & & & \\ & & e^{i\beta} & & & \\ & & & e^{i\beta} & & \\ & & & & e^{i\gamma} & \\ & & & & & e^{i\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_e \\ e \\ \nu_\mu \\ \mu \\ \nu_\tau \\ \tau \end{bmatrix}$$

con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tres parámetros independientes. Ver que esta transformación es una simetría de \mathcal{L}_{EW} es trivial ya que todos los términos $\bar{\Psi} i \gamma^\mu D_\mu \Psi$ con Ψ algún doblete de leptones se transforman trivialmente en $\bar{\Psi} e^{-i\alpha} i \gamma^\mu D_\mu e^{i\alpha} \Psi$ y como α es una constante global entonces las exponenciales se cancelan.

Consideremos una transformación con $\beta = \gamma = 0$, es decir sólo con α . Partiendo del lagrangiano

$$\mathcal{L}_{EW} = \sum_{\Psi \in \text{dobletes E.W.}} \left(\bar{\Psi}_L i \gamma^\mu D_L^{(\Psi)} \Psi_L + \bar{\Psi}_R i \gamma^\mu D_R^{(\Psi)} \Psi_R \right) - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - \frac{1}{4} W_a^{\mu\nu} W_a^{\mu\nu}$$

la corriente de Noether asociada a esta simetría es

$$\begin{aligned}
 J^\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Psi_L)} \frac{\delta \Psi_L}{\alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Psi_R)} \frac{\delta \Psi_R}{\alpha} \leftarrow \Psi \text{ es el electrónico } \begin{bmatrix} \nu_e \\ e \end{bmatrix} \\
 &= -\overline{\Psi}_L \gamma^\mu \Psi_L - \overline{\Psi}_R \gamma^\mu \Psi_R \\
 &= -\overline{\Psi} \gamma^\mu \Psi
 \end{aligned}$$

¡ME FALTÓ CONSIDERAR LOS TÉRMINOS DE LOS CAMPOS TECHADOS! y como $\partial_\mu J^\mu = 0$ por teorema de Noether entonces

$$\begin{aligned}
 L &= \int J^0 d^3x \\
 &= - \int \overline{\Psi} \gamma^0 \Psi d^3x \\
 &= - \int \overline{\nu}_e \gamma^0 \nu_e d^3x - \int \overline{e} \gamma^0 e d^3x
 \end{aligned}$$

es una cantidad conservada. Entiendo que eso es el número leptónico electrónico. Cada neutrino electrónico y cada electrón tienen número leptónico +1 y los anti neutrinos y anti electrones número -1. Cómo pasar de la interpretación de campos a interpretación de partículas es algo que no conozco.

Problema 7 (Carga eléctrica de los campos)

Se pide estudiar una simetría U (1) global del lagrangiano electrodébil. O algo así. Creo que la idea es plantear la siguiente transformación

$$\text{Transformación} \rightarrow \begin{cases} \psi_{\text{up-type lepton}} \rightarrow \psi'_{\text{up-type lepton}} = e^{in_\nu \xi} \psi_{\text{up-type lepton}} \\ \psi_{\text{down-type lepton}} \rightarrow \psi'_{\text{down-type lepton}} = e^{in_e \xi} \psi_{\text{down-type lepton}} \\ \psi_{\text{up-type quark}} \rightarrow \psi'_{\text{up-type quark}} = e^{in_u \xi} \psi_{\text{up-type quark}} \\ \psi_{\text{down-type quark}} \rightarrow \psi'_{\text{down-type quark}} = e^{in_d \xi} \psi_{\text{down-type quark}} \\ W_\mu = W^-_\mu \rightarrow W'_\mu = e^{in_W \xi} W_\mu \\ A_\mu \rightarrow A'_\mu = e^{in_A \xi} A_\mu \\ Z_\mu \rightarrow Z'_\mu = e^{in_Z \xi} Z_\mu \end{cases} \quad \xi \in \mathbb{R} \text{ el parámetro}$$

y ver que ésta es una simetría del lagrangiano

$$\mathcal{L}'_{EW} = \mathcal{L}_{EW} \iff \begin{cases} n_\nu = 0 \\ n_u = -\frac{2}{3}n_e \\ n_d = \frac{1}{3}n_e \\ n_W = n_e \\ n_Z = 0 \\ n_A = 0 \end{cases} .$$

Ahora se viene un rebajón de cuentas. Pero todo esto del modelo estándar está muy interesante así que las voy a hacer. El lagrangiano \mathcal{L}_{EW} es (ver box 27)

$$\mathcal{L}_{EW} = \sum_{\Psi \in \text{dobletes E.W.}} \left(\overline{\Psi}_L i \gamma^\mu D_L^{(\Psi)} \Psi_L + \overline{\Psi}_R i \gamma^\mu D_R^{(\Psi)} \Psi_R \right) - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - \frac{1}{4} W_a^{\mu\nu} W_a^{\mu\nu} .$$

Para aplicar esta transformación hay que desarrollar todos los términos en función de W^\pm , Z y A . Asumiré que

$$\text{Cabibbo} = \mathbb{1} \rightarrow \text{Asumo esto}$$

Los términos con derivadas covariantes ya los desarrollé en la resolución del problema 8 de la presente guía (ver en la página siguiente). Para leptones se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \left[\bar{\Psi}_L i \gamma^\mu D_L^{(\Psi)} \Psi_L + \bar{\Psi}_R i \gamma^\mu D_R^{(\Psi)} \Psi_R \right]_{\text{leptón}} &= \bar{\Psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \Psi + e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu + \left(-\frac{g_w}{\sqrt{2}} \right) \bar{\nu}_L \gamma^\mu \psi_L W^+_\mu + \left(-\frac{g_w}{\sqrt{2}} \right) \bar{\psi}_L \gamma^\mu \nu_L W^-_\mu + \dots \\ &\dots + \left(-\frac{g' \sin \theta_W}{2} - \frac{g_w \cos \theta_W}{2} \right) \bar{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L Z_\mu + \dots \\ &\dots + \left(-\frac{g' \sin \theta_W}{2} + \frac{g_w \cos \theta_W}{2} \right) \bar{\psi}_L \gamma^\mu \psi_L Z_\mu + \dots \\ &\dots + (-g' \sin \theta_W) \bar{\psi}_R \gamma^\mu \psi_R Z_\mu \end{aligned}$$

donde $\begin{cases} \psi \equiv \psi_{\text{down-type lepton}} \\ \nu \equiv \psi_{\text{up-type lepton}} \end{cases}$. Debido a que ψ y ν pertenecen a un doblete independiente de campos y no se mezclan con los demás, y debido a que estos términos no aparecen repetidos en ningún otro lugar, este bloque debe ser invariante como un todo. Y dada la composición de cada término, cada uno de ellos debe ser invariante en forma independiente. Viendo cómo transforma cada uno de ellos encontramos lo siguiente:

$$\begin{cases} \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu \rightarrow e^{in_A \xi} \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu & \Rightarrow n_A = 0 \\ \bar{\nu}_L \gamma^\mu \psi_L W^+_\mu \rightarrow e^{i(n_e - n_\nu - n_W) \xi} \bar{\nu}_L \gamma^\mu \psi_L W^+_\mu & \Rightarrow n_e - n_\nu - n_W = 0 \\ \bar{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L Z_\mu \rightarrow e^{in_Z \xi} \bar{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L Z_\mu & \Rightarrow n_Z = 0 \end{cases}$$

En cuanto a los quarks, de forma completamente análoga, esto es

$$\begin{aligned} \left[\bar{\Psi}_L i \gamma^\mu D_L^{(\Psi)} \Psi_L + \bar{\Psi}_R i \gamma^\mu D_R^{(\Psi)} \Psi_R \right]_{\text{quarks}} &= \bar{\Psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \Psi + \left(-\frac{2}{3} e \right) \bar{u} \gamma^\mu u A_\mu + \frac{e}{3} \bar{d} \gamma^\mu d A_\mu + \dots \\ &\dots + \left(-\frac{g_w}{\sqrt{2}} \right) \bar{u}_L \gamma^\mu d_L W^+_\mu + \left(-\frac{g_w}{\sqrt{2}} \right) \bar{d}_L \gamma^\mu u_L W^-_\mu + \dots \\ &\dots + \left(\frac{g' \sin \theta_W}{6} - \frac{g_w \cos \theta_W}{2} \right) \bar{u}_L \gamma^\mu u_L Z_\mu + \dots \\ &\dots + \left(\frac{g' \sin \theta_W}{6} + \frac{g_w \cos \theta_W}{2} \right) \bar{d}_L \gamma^\mu d_L Z_\mu + \dots \\ &\dots + \left(\frac{2g' \sin \theta_W}{3} \right) \bar{u}_R \gamma^\mu u_R Z_\mu + \left(-\frac{g' \sin \theta_W}{3} \right) \bar{d}_R \gamma^\mu d_R Z_\mu. \end{aligned}$$

por lo que

$$\bar{u}_L \gamma^\mu d_L W^+_\mu \rightarrow e^{i(n_d - n_W - n_u) \xi} \bar{u}_L \gamma^\mu d_L W^+_\mu \Rightarrow n_d = n_W + n_u \quad .$$

El resto de los términos dicen cosas ya sabidas.

Ahora voy a verificar la simetría para los términos de gauge $B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}$ y $W^a_{\mu\nu} W_a^{\mu\nu}$. Para el término con B esto es

$$\begin{aligned} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} &= (\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu) (\partial^\mu B^\nu - \partial^\nu B^\mu) \\ B_\mu = A_\mu \cos \theta_W - Z_\mu \sin \theta_W \rightarrow &= (\partial_\mu A_\nu \cos - \partial_\mu Z_\nu \sin - \partial_\nu A_\mu \cos + \partial_\nu Z_\mu \sin) \times \dots \\ &\dots \times (\partial^\mu A^\nu \cos - \partial^\mu Z^\nu \sin - \partial^\nu A^\mu \cos + \partial^\nu Z^\mu \sin) \end{aligned}$$

y van a aparecer términos que son

$$\text{Términos que aparecen} \rightarrow \begin{cases} \sim AA \rightarrow AA e^{2in_A \xi} & \Rightarrow n_A = 0 \\ \sim ZZ \rightarrow ZZ e^{2in_Z \xi} & \Rightarrow n_Z = 0 \\ \sim AZ \rightarrow AZ e^{i(n_A + n_Z) \xi} & \Rightarrow n_A + n_Z = 0 \end{cases} .$$

En definitiva, nada nuevo. El término $W^a_{\mu\nu} W_a^{\mu\nu}$ tampoco arrojará nada nuevo, sólo que $n_{W^+} = -n_{W^-}$ pero eso se sabe por definición de W^\pm .

PREGUNTA 5 - Simetría global de carga eléctrica

Lo que se ha encontrado, entonces, es que

$$\begin{cases} n_A = 0 \\ n_e = n_\nu + n_W \\ n_Z = 0 \\ n_d = n_W + n_u \end{cases} .$$

No sé si acá se terminó el juego que se le puede sacar a esta simetría o si hay forma de encontrar más ecuaciones para completar el sistema.

Problema 8

Antes de comenzar a responder voy a buscar los vértices de la teoría electrodébil. Recordemos el lagrangiano electrodébil (ver box 27)

$$\mathcal{L}_{EW} = \sum_{\Psi \in \text{dobletes E.W.}} \left(\overline{\Psi}_L i \gamma^\mu D_L^{(\Psi)} \Psi_L + \overline{\Psi}_R i \gamma^\mu D_R^{(\Psi)} \Psi_R \right) - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - \frac{1}{4} W^a_{\mu\nu} W^{a\mu\nu}$$

donde dobletes E.W. = $\left\{ \begin{bmatrix} \nu_e \\ e \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u \\ d' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ s' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} t \\ b' \end{bmatrix} \right\}$ con $\begin{bmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & a & b \\ i & b & b \\ \ominus & o & \ominus \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ s \\ b \end{bmatrix}$. Como la consigna dice que no consideremos a Cabibbo entonces

$$\begin{bmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ s \\ b \end{bmatrix} \rightarrow \text{Cabibbo} = 1 \text{ por consigna}$$

Usando la expresión para $D_L^{(\Psi)}$ que figura en el box 27 el término left es

$$\begin{aligned} \overline{\Psi}_L i \gamma^\mu D_L^{(\Psi)} \Psi_L &= \overline{\Psi}_L i \gamma^\mu \left(\partial_\mu + i \frac{g'}{2} Y_L^{(\Psi)} B_\mu + i \frac{g_w}{2} T_a W^a_\mu \right) \Psi_L \\ &= \overline{\Psi}_L i \gamma^\mu \partial_\mu \Psi_L - \frac{g'}{2} \overline{\Psi}_L \gamma^\mu Y_L^{(\Psi)} \Psi_L B_\mu - \frac{g_w}{2} \overline{\Psi}_L \gamma^\mu T_a \Psi_L W^a_\mu \end{aligned}$$

Ahora se aplica la “ruptura espontánea de simetría” para pasar de los campos B, W^a a los campos A, Z, W^\pm usando

$$\begin{bmatrix} B_\mu \\ W^3_\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_W & -\sin \theta_W \\ \sin \theta_W & \cos \theta_W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} W^1_\mu \\ W^2_\mu \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W^+_\mu \\ W^-_\mu \end{bmatrix} .$$

Entonces

$$\begin{aligned} \overline{\Psi}_L i \gamma^\mu D_L^{(\Psi)} \Psi_L &= \overline{\Psi}_L i \gamma^\mu \partial_\mu \Psi_L - \frac{g'}{2} \overline{\Psi}_L \gamma^\mu Y_L^{(\Psi)} \Psi_L (A_\mu \cos \theta_W - Z_\mu \sin \theta_W) + \dots \\ &\dots - \frac{g_w}{2} \overline{\Psi}_L \gamma^\mu T_1 \Psi_L \frac{W^+_\mu + W^-_\mu}{\sqrt{2}} - \frac{g_w}{2} \overline{\Psi}_L \gamma^\mu T_2 \Psi_L i \frac{W^+_\mu - W^-_\mu}{\sqrt{2}} + \dots \\ &\dots - \frac{g_w}{2} \overline{\Psi}_L \gamma^\mu T_3 \Psi_L (A_\mu \sin \theta_W + Z_\mu \cos \theta_W) \\ &= \overline{\Psi}_L i \gamma^\mu \partial_\mu \Psi_L + \overline{\Psi}_L \gamma^\mu \left(-\frac{g' \cos \theta_W}{2} Y_L^{(\Psi)} - \frac{g_w \sin \theta_W}{2} T_3 \right) \Psi_L A_\mu + \dots \\ &\dots + \overline{\Psi}_L \gamma^\mu \left(\frac{g' \sin \theta_W}{2} Y_L^{(\Psi)} - \frac{g_w \cos \theta_W}{2} T_3 \right) \Psi_L Z_\mu + \dots \\ &\dots + \overline{\Psi}_L \gamma^\mu \frac{g_w}{2\sqrt{2}} (-T_1 - iT_2) \Psi_L W^+_\mu + \overline{\Psi}_L \gamma^\mu \frac{g_w}{2\sqrt{2}} (-T_1 + iT_2) \Psi_L W^-_\mu \\ \left. \begin{matrix} T_i = \sigma_i \\ g' \cos \theta_W = e \\ g_w \sin \theta_W = e \end{matrix} \right\} \rightarrow &= \overline{\Psi}_L i \gamma^\mu \partial_\mu \Psi_L + \overline{\Psi}_L \gamma^\mu \left(-\frac{e}{2} \right) \left(Y_L^{(\Psi)} + T_3 \right) \Psi_L A_\mu + \dots \\ &\dots + \overline{\Psi}_L \gamma^\mu \left(\frac{g' \sin \theta_W}{2} Y_L^{(\Psi)} - \frac{g_w \cos \theta_W}{2} T_3 \right) \Psi_L Z_\mu + \dots \\ &\dots + \overline{\Psi}_L \gamma^\mu \frac{g_w}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & -2 \end{bmatrix} \Psi_L W^+_\mu + \overline{\Psi}_L \gamma^\mu \frac{g_w}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix} \Psi_L W^-_\mu . \end{aligned}$$

Para poder seguir ahora habría que decir si Ψ es un doblete de quarks o de leptones ya que cada uno tiene su propia hipercarga. En cuanto a la parte right se tiene que

$$\begin{aligned}\overline{\Psi}_R i\gamma^\mu D_R^{(\Psi)} \Psi_R &= \overline{\Psi}_R i\gamma^\mu \left(\partial_\mu + i\frac{g'}{2} Y_R^{(\Psi)} B_\mu \right) \Psi_R \\ B_\mu = A_\mu \cos \theta_W - Z_\mu \sin \theta_W \rightarrow &= \overline{\Psi}_R i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi_R - \frac{g'}{2} \overline{\Psi}_R \gamma^\mu Y_R^{(\Psi)} \Psi_R (A_\mu \cos \theta_W - Z_\mu \sin \theta_W)\end{aligned}$$

Sumando partes left y right se obtiene

$$\begin{aligned}\overline{\Psi}_L i\gamma^\mu D_L^{(\Psi)} \Psi_L + \overline{\Psi}_R i\gamma^\mu D_R^{(\Psi)} \Psi_R &= \overline{\Psi} i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi + \overline{\Psi}_L \gamma^\mu \left(-\frac{e}{2} \right) (Y_L^{(\Psi)} + T_3) \Psi_L A_\mu + \dots \\ &\dots + \overline{\Psi}_L \gamma^\mu \left(\frac{g' \sin \theta_W}{2} Y_L^{(\Psi)} - \frac{g_w \cos \theta_W}{2} T_3 \right) \Psi_L Z_\mu + \dots \\ &\dots + \overline{\Psi}_L \gamma^\mu \frac{g_w}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} & -2 \\ 0 & \end{bmatrix} \Psi_L W^+_\mu + \overline{\Psi}_L \gamma^\mu \frac{g_w}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} & 0 \\ -2 & \end{bmatrix} \Psi_L W^-_\mu + \dots \\ &\dots + \overline{\Psi}_R \gamma^\mu \left(-\frac{e}{2} Y_R^{(\Psi)} \right) \Psi_R A_\mu + \overline{\Psi}_R \gamma^\mu \frac{g' \sin \theta_W}{2} Y_R^{(\Psi)} \Psi_R Z_\mu\end{aligned}$$

Usando las hipercargas del box 27 (o las de [Wikipedia](#)) para leptones esto es

$$\begin{aligned}\left[\overline{\Psi}_L i\gamma^\mu D_L^{(\Psi)} \Psi_L + \overline{\Psi}_R i\gamma^\mu D_R^{(\Psi)} \Psi_R \right]_{\text{leptón}} &= \overline{\Psi} i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi + \overline{\Psi}_L \gamma^\mu \left(-\frac{e}{2} \right) \begin{bmatrix} 0 & \\ & -2 \end{bmatrix} \Psi_L A_\mu + \dots \\ &= \dots + \overline{\Psi}_L \gamma^\mu \begin{bmatrix} -\frac{g' \sin \theta_W}{2} - \frac{g_w \cos \theta_W}{2} & \\ & -\frac{g' \sin \theta_W}{2} + \frac{g_w \cos \theta_W}{2} \end{bmatrix} \Psi_L Z_\mu + \dots \\ &\dots + \overline{\Psi}_L \gamma^\mu \frac{g_w}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} & -2 \\ 0 & \end{bmatrix} \Psi_L W^+_\mu + \overline{\Psi}_L \gamma^\mu \frac{g_w}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} & 0 \\ -2 & \end{bmatrix} \Psi_L W^-_\mu + \dots \\ &\dots + \overline{\Psi}_R \gamma^\mu \left(-\frac{e}{2} \begin{bmatrix} 0 & \\ & -2 \end{bmatrix} \right) \Psi_R A_\mu + \overline{\Psi}_R \gamma^\mu \frac{g' \sin \theta_W}{2} \begin{bmatrix} 0 & \\ & -2 \end{bmatrix} \Psi_R Z_\mu \\ \Psi = \begin{bmatrix} \nu \\ \psi \end{bmatrix} \rightarrow &= \overline{\Psi} i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi + e\overline{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu + \left(-\frac{g_w}{\sqrt{2}} \right) \overline{\nu}_L \gamma^\mu \psi_L W^+_\mu + \left(-\frac{g_w}{\sqrt{2}} \right) \overline{\psi}_L \gamma^\mu \nu_L W^-_\mu + \dots \\ &\dots + \alpha \overline{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L Z_\mu + \beta \overline{\psi}_L \gamma^\mu \psi_L Z_\mu + \gamma \overline{\psi}_R \gamma^\mu \psi_R Z_\mu\end{aligned}$$

donde $\begin{cases} \alpha \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{g' \sin \theta_W}{2} - \frac{g_w \cos \theta_W}{2} \\ \beta \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{g' \sin \theta_W}{2} + \frac{g_w \cos \theta_W}{2} \\ \gamma \stackrel{\text{def}}{=} -g' \sin \theta_W \end{cases}$. Aquí están expuestos todos los vértices que acoplan leptones con campos de gauge en la teoría electrodébil.

En cuanto a los quarks esto es:

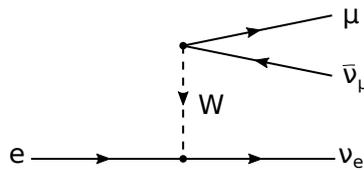
$$\begin{aligned}
 \left[\bar{\Psi}_L i \gamma^\mu D_L^{(\Psi)} \Psi_L + \bar{\Psi}_R i \gamma^\mu D_R^{(\Psi)} \Psi_R \right]_{\text{quarks}} &= \bar{\Psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \Psi + \bar{\Psi}_L \gamma^\mu \left(-\frac{e}{2} \right) \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \\ & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \Psi_L A_\mu + \dots \\
 &\dots + \bar{\Psi}_L \gamma^\mu \left(\frac{g' \sin \theta_W}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \\ & \frac{1}{3} \end{bmatrix} - \frac{g_w \cos \theta_W}{2} \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix} \right) \Psi_L Z_\mu + \dots \\
 &\dots + \bar{\Psi}_L \gamma^\mu \frac{g_w}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} & -2 \\ 0 & \end{bmatrix} \Psi_L W^+_\mu + \bar{\Psi}_L \gamma^\mu \frac{g_w}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} & 0 \\ -2 & \end{bmatrix} \Psi_L W^-_\mu + \dots \\
 &\dots + \bar{\Psi}_R \gamma^\mu \left(-\frac{e}{2} \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \\ & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \right) \Psi_R A_\mu + \bar{\Psi}_R \gamma^\mu \frac{g' \sin \theta_W}{2} \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \\ & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \Psi_R Z_\mu \\
 \Psi = \begin{bmatrix} u \\ d \end{bmatrix} \rightarrow &= \bar{\Psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \Psi + \left(-\frac{2}{3} e \right) \bar{u} \gamma^\mu u A_\mu + \frac{e}{3} \bar{d} \gamma^\mu d A_\mu + \dots \\
 &\dots + \left(-\frac{g_w}{\sqrt{2}} \right) \bar{u}_L \gamma^\mu d_L W^+_\mu + \left(-\frac{g_w}{\sqrt{2}} \right) \bar{d}_L \gamma^\mu u_L W^-_\mu + \dots \\
 &\dots + \left(\frac{g' \sin \theta_W}{6} - \frac{g_w \cos \theta_W}{2} \right) \bar{u}_L \gamma^\mu u_L Z_\mu + \dots \\
 &\dots + \left(\frac{g' \sin \theta_W}{6} + \frac{g_w \cos \theta_W}{2} \right) \bar{d}_L \gamma^\mu d_L Z_\mu + \dots \\
 &\dots + \left(\frac{2g' \sin \theta_W}{3} \right) \bar{u}_R \gamma^\mu u_R Z_\mu + \left(-\frac{g' \sin \theta_W}{3} \right) \bar{d}_R \gamma^\mu d_R Z_\mu.
 \end{aligned}$$

Si bien se usó $\Psi = \begin{bmatrix} u \\ d \end{bmatrix}$, no son los quarks *up* y *down* sino que *u* representa a cualquier *up-type quark* y *d* representa a cualquier *down-type quark*. En particular pueden ser los quarks *u* y *d*.

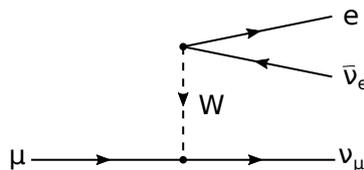
Solución del problema

Ahora sí resolveré el problema 8:

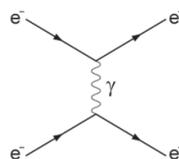
- a) Este proceso viola la conservación de la carga eléctrica así que no es posible.
- b) No se conserva el número leptónico por lo tanto no es posible.
- c) Tanto la carga como el número leptónico se conservan. Usando los vértices que nos dieron en clase logré armar el siguiente diagrama



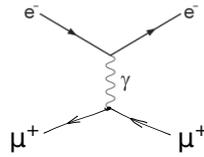
- d) Es igual al anterior:



- e) Es posible mediante el intercambio de un fotón



f) Todo se conserva así que debería ser posible. Si bien no hay ningún vértice que una al campo electrónico con el campo muónico, son partículas cargadas así que interactúan electromagnéticamente. Se me ocurre el siguiente diagrama para este proceso:



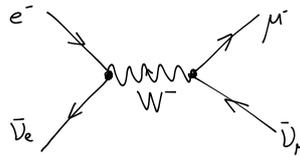
g) No se conserva el número leptónico tauónico $L_\tau^{\text{inicial}} = -1$ y $L_\tau^{\text{final}} = 1$. Proceso no posible.

h) Si admitimos que puede haber oscilaciones de neutrinos, este proceso es perfectamente posible usando el diagrama previo. Si no admitimos oscilaciones de neutrinos entonces CREO que el proceso viola la conservación del número tauónico y el número muónico (ver [este link](#)este link). El número leptónico tauónico (o como se llame) es $L_\tau^{\text{inicial}} = 1$ y $L_\tau^{\text{final}} = 0$ y para el muónico $L_\mu^{\text{inicial}} = 0$ y $L_\mu^{\text{final}} = 1$.

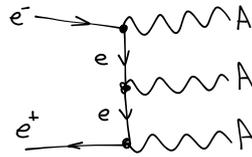
i) Diría que es imposible ya que no se conservan los números L_μ y L_e .

j) Falso pues no se conserva L_e .

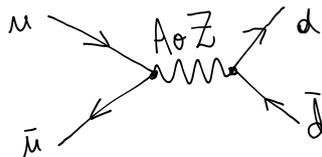
k) Es posible:



l) El número L_e se conserva. También la carga. Se puede hacer con el siguiente diagrama

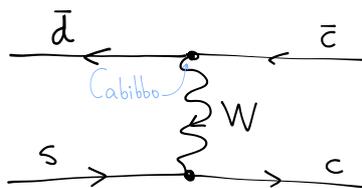


m) Creo que dos vértices de QED logran este proceso:



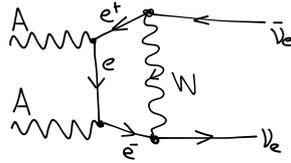
n) No se conserva el análogo al número leptónico de cada especie pero para quarks. El número quarkónico L_s y el L_d no es conservado. Imposible este proceso.

o) Los números L_e y L_s (número quarkónico strange) se conservan \checkmark . La carga eléctrica también. Se puede con el siguiente diagrama



p) No se conserva el número quarkónico strangeónico ya que $L_s = +1$ (para el charm) y al final $L_s = 0$. También se viola el número downónico.

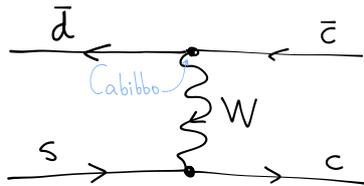
q) Es posible con el siguiente diagrama



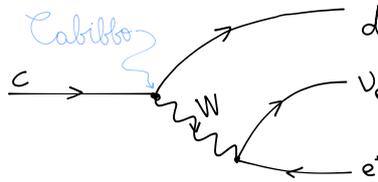
r) No se conserva el número downónico ni el número strangeónico. El proceso no es posible.

Problema 9

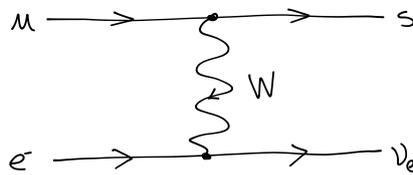
n) Ahora este proceso sí es posible del siguiente modo



p) Ahora sí es posible:



r) Sí:



Box 18 - ¿Sabías que...

... La voz del profesor Stephen Hawking suena en la canción **Keep Talking** de Pink Floyd?

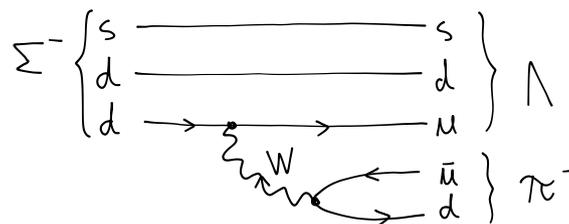
Problema 10

Las composiciones de las partículas pueden consultarse en el dibujito del box 23.

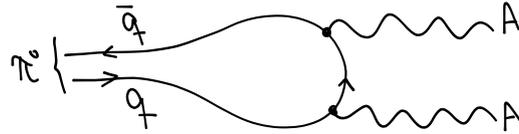
a) En términos de quarks el proceso es

$$\Sigma^- \rightarrow \Lambda \pi^- \quad \equiv \quad (dds) \rightarrow (uds) (\bar{u}d)$$

y en forma diagramática se puede dar de la siguiente manera:



b) El π^0 está compuesto por un quark y su mismo antiquark. En consecuencia el proceso puede darse del siguiente modo



c)

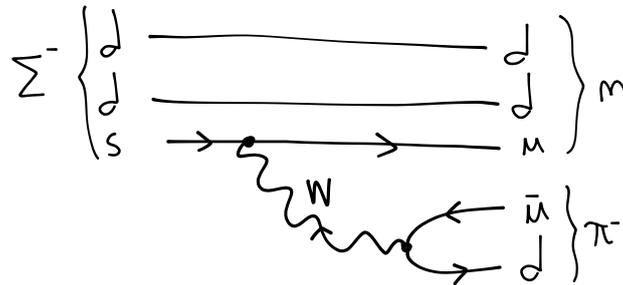
PREGUNTA 6 - Cómo es un 'pi cero' en un diagrama de Feynman?

No estoy seguro sobre cómo se forma el π^0 , si con un \bar{u} y un u alcanza o si hay que generar una combinación lineal cómo sería... Encontré lo de [este link](#) donde lo generan sólo como $\bar{u}u$. Asumiendo que eso está bien entonces

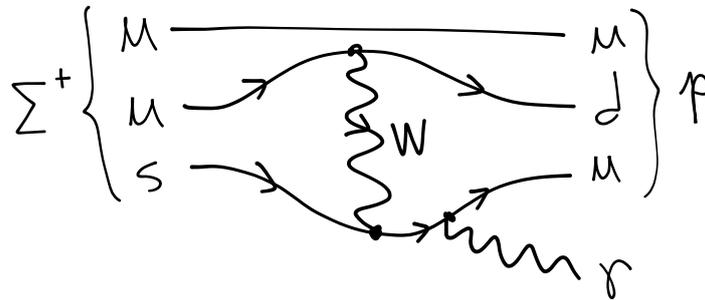


La posta es que $|\pi^0\rangle = |u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle$. Entonces hay que hacer una superposición de diagramas, es decir, dibujar diagramas en los que π^0 está compuesto por $u\bar{u}$ y luego otros en los que está compuesto por $d\bar{d}$ y superponerlos sumando. Lo pregunté en las consultas.

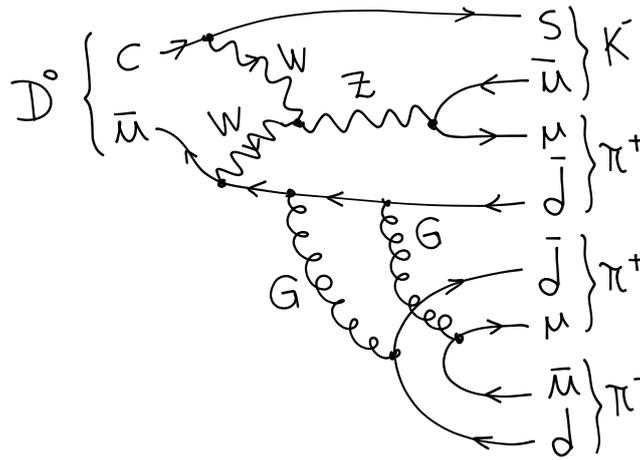
d) Se puede del siguiente modo



e) Es el siguiente

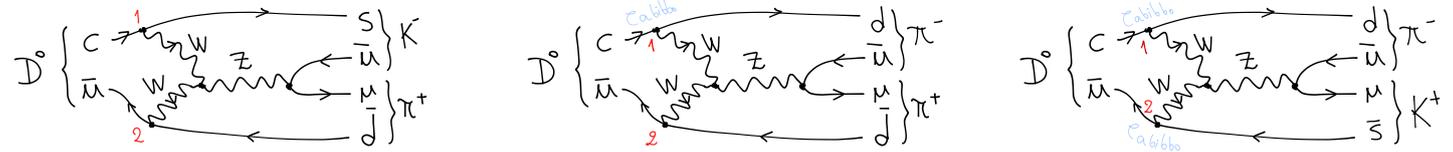


f) se me ocurrió lo siguiente



Problema 11

A continuación se exponen posibles diagramas de Feynman para cada uno de los decaimientos de la consigna:



Como se puede ver son todos prácticamente iguales sólo que aumenta el “orden Cabibbo”. Hasta donde entiendo la probabilidad de un proceso satisface

$$\mathbb{P}(\text{proceso}) = \prod_{i \in \{\text{vértices}\}} \mathbb{P}(i) \rightarrow \text{Intuición?}$$

Si lo anterior es verdadero entonces

$$\begin{cases} \mathbb{P}(D^0 \rightarrow K^- \pi^+) = p_1 \times p_2 \times \text{algo} \\ \mathbb{P}(D^0 \rightarrow \pi^- \pi^+) = p_1^{\text{Cabibbo}} \times p_2 \times \text{algo} \\ \mathbb{P}(D^0 \rightarrow K^+ \pi^-) = p_1^{\text{Cabibbo}} \times p_2^{\text{Cabibbo}} \times \text{algo} \end{cases}$$

y usando $\begin{cases} p_1^{\text{Cabibbo}} = p_1 \sin \theta \\ p_2^{\text{Cabibbo}} = p_2 \sin \theta \end{cases}$ se obtiene

$$\begin{cases} \mathbb{P}(D^0 \rightarrow K^- \pi^+) = p_1 \times p_2 \times \text{algo} \\ \mathbb{P}(D^0 \rightarrow \pi^- \pi^+) = p_1 \times p_2 \times \sin \theta \times \text{algo} \\ \mathbb{P}(D^0 \rightarrow K^+ \pi^-) = p_1 \times p_2 \times \sin^2 \theta \times \text{algo} \end{cases}$$

Entonces

$$\frac{\mathbb{P}(D^0 \rightarrow K^- \pi^+)}{\mathbb{P}(D^0 \rightarrow K^+ \pi^-)} = \frac{1}{\sin^2 \theta}$$

$$\theta = 13^\circ \rightarrow \approx 19,76$$

y

$$\frac{\mathbb{P}(D^0 \rightarrow \pi^- \pi^+)}{\mathbb{P}(D^0 \rightarrow K^0 \pi^-)} = \frac{1}{\sin \theta} \approx 4,44.$$

No termino de entender qué significa la notación de la consigna 360 : 19 : 1, pero me dio algo cercano a 19 así que asumo que está bien lo que hice.

Guía 9 - Modelo estándar y Mecanismo de Higgs

Problema 1

El potencial

$$V(\phi) = \lambda \left(\phi^* \phi - \frac{v^2}{2} \right)^2 \rightarrow \text{Potencial de Higgs}$$

que tiene un mínimo para

$$|\phi| = \frac{v}{\sqrt{2}} \rightarrow \text{Mínimo}$$

Si

$$\phi = \frac{\phi_a + i\phi_b}{\sqrt{2}} \rightarrow \phi \in \mathbb{C}$$

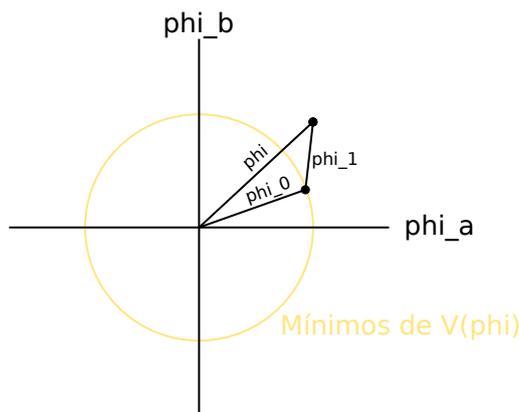
entonces tiene infinitos mínimos que yacen sobre una circunferencia dada por

$$\begin{aligned} \frac{v^2}{2} &= |\phi|^2 \\ &= \frac{\phi_a^2 + \phi_b^2}{2}. \end{aligned}$$

El desarrollo de ϕ alrededor de alguno de estos infinitos mínimos es

$$\phi(x) = \phi_0 + \phi_1(x)$$

donde $\phi_0 = \frac{\phi_{0a} + i\phi_{0b}}{\sqrt{2}}$ tal que $|\phi_0|^2 = \frac{v^2}{2}$ y $\phi_1 \in \mathbb{C}$ es el apartamiento del mínimo. (Las raicitas de dos son bastante molestas a decir verdad.) Gráficamente lo anterior no es más que



Véase que ϕ_0 está quieto y el que se mueve es ϕ_1 . Entiendo que no se puede hacer lo que pide la consigna, i.e. $\phi = \frac{v+h}{\sqrt{2}}$ con $h \in \mathbb{R}$ pues estaríamos limitando al campo ϕ a ser real. O algo no estoy entendiendo. Voy a seguir lo que hicimos en la teórica. Llamando a las componentes del apartamiento del mínimo ϕ_1 según

$$\phi_1(x) = h(x) + i\rho(x) \rightarrow \text{Sólo les doy estos nombres}$$

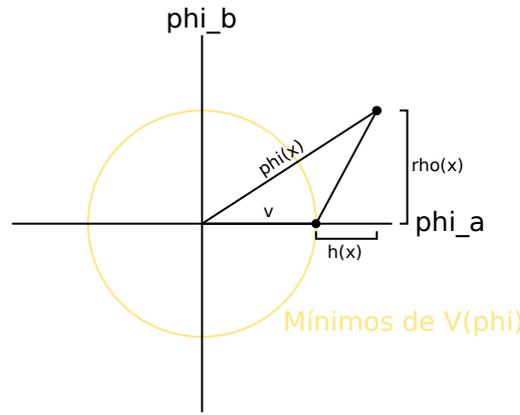
se obtiene

$$\phi(x) = \phi_0 + h(x) + i\rho(x) \rightarrow \text{No hice nada más que dar nombrecitos}$$

donde aún $\phi_0 \in \mathbb{C}$. Debido a que esto es un simple cambio de variable, entonces podemos elegir a ϕ_0 como se nos cante. (Notar que la elección de ϕ_0 altera la definición de h y ρ .) En particular se puede elegir

$$\phi_0 = \frac{v}{\sqrt{2}} \in \mathbb{R} \rightarrow \text{Elegimos}$$

Es decir que ahora tenemos:



Nótese que todo lo anterior no fue más que cambiarle el nombre a las cosas y elegir un mínimo. Entiendo que esta elección forzada de ϕ_0 es la ruptura espontánea de la simetría. Pero no estoy seguro. Entonces ahora tenemos que

$$\phi(x) = \frac{v}{\sqrt{2}} + \frac{h(x) + i\rho(x)}{\sqrt{2}}. \rightarrow \text{Hemos elegido } \phi_0 = v \in \mathbb{R}$$

Ahora esto se reemplaza en el lagrangiano de la consigna

$$\mathcal{L}^{U(1)} = (D_\mu \phi)^* (D^\mu \phi) - \lambda \left(\phi^* \phi - \frac{v}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}.$$

Primero desarrollaré uno de los términos con derivada covariante. Voy a usar $D_\mu \stackrel{\text{def}}{=} \partial_\mu + igA_\mu$ pues es lo que yo venía usando. Entonces

$$\begin{aligned} D_\mu \phi &= (\partial_\mu + igA_\mu) \left(\frac{v + h + i\rho}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \frac{\partial_\mu h + i\partial_\mu \rho + igvA_\mu + ighA_\mu - g\rho A_\mu}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

por lo que

$$(D_\mu \phi)^* (D^\mu \phi) = \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h + \frac{g^2 v^2}{2} A_\mu A^\mu + \frac{g^2}{2} h^2 A_\mu A^\mu + (\text{términos con } \rho).$$

El potencial de Higgs en términos de estas cositas que hemos definido es

$$\begin{aligned} V(\phi) &= \lambda \left(\left(\frac{v + h + i\rho}{\sqrt{2}} \right)^* \left(\frac{v + h + i\rho}{\sqrt{2}} \right) - \frac{v^2}{2} \right)^2 \\ &= \lambda v^2 h^2 + \lambda v h^3 + \frac{\lambda}{4} h^4 + (\text{términos con } \rho). \end{aligned}$$

Metiendo esto en el lagrangiano se obtiene

$$\mathcal{L}^{U(1)} = \underbrace{\frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h + \lambda v^2 h^2}_{\text{Klein-Gordon}} + \underbrace{\frac{g^2 v^2}{2} A_\mu A^\mu - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}}_{\text{Proca}} + \underbrace{\frac{g^2}{2} h^2 A_\mu A^\mu + \lambda v h^3 + \frac{\lambda}{4} h^4}_{\text{Vértices de interacción}} + (\text{términos con } \rho).$$

Como se puede ver el campo h satisface la ecuación de Klein-Gordon con una cierta masa mientras que el campo A se rige por el lagrangiano de Proca con masa $m_A = gv$ [Halzen and Martin, 2008, p. 326]. A los términos con ρ no sé qué les pasa. En la práctica no se mencionó. En la teórica se habló de un “bosón de Goldstone” que lo estudiaré para el final.

Problema 2

Suponer que $\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2$ adquiere un valor de expectación en el vacío en algún valor arbitrario significa que

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 \rightarrow \text{Adquiere valor de expectación en vacío}$$

donde Φ_0 es tal que

$$\Phi_0^\dagger \Phi_0 = \frac{v^2}{2} \rightarrow \Phi_0 \text{ es algún mínimo}$$

y

$$\Phi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \phi_a(x) \\ \phi_b(x) \end{bmatrix} \rightarrow \text{Apartamientos del equilibrio}$$

son los apartamientos del equilibrio.

Por otro lado, gaugear únicamente el grupo $\mathbf{SU}(2)$ implica hacer la sustitución

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + i \frac{g_w}{2} T_a W^a{}_\mu \rightarrow \text{Gaugear } \mathbf{SU}(2)$$

Usando $\Phi = \Phi_0 + \Phi_1(x)$ se tiene que

$$\begin{aligned} (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) &= \left(\partial_\mu \Phi_1 + i \frac{g_w}{2} T_a \Phi_0 W^a{}_\mu + i \frac{g_w}{2} T_a \Phi_1 W^a{}_\mu \right)^\dagger \left(\partial^\mu \Phi_1 + i \frac{g_w}{2} T_a \Phi_0 W^{a\mu} + i \frac{g_w}{2} T_a \Phi_1 W^{a\mu} \right) \\ &= \partial_\mu \Phi_1 \partial^\mu \Phi_1 + \frac{g_w^2}{4} \Phi_0^\dagger T_a T_b \Phi_0 W^a{}_\mu W^{b\mu} + \frac{g_w^2}{4} \Phi_1^\dagger T_a T_b \Phi_1 W^a{}_\mu W^{b\mu} + \frac{g_w^2}{2} \Phi_0^\dagger T_a T_b \Phi_1 W^a{}_\mu W^{b\mu} \\ &= \partial_\mu \Phi_1 \partial^\mu \Phi_1 + \frac{g_w^2}{4} \left(\Phi_0^\dagger T_a T_b \Phi_0 + \Phi_1^\dagger T_a T_b \Phi_1 + 2 \Phi_0^\dagger T_a T_b \Phi_1 \right) W^a{}_\mu W^{b\mu}. \end{aligned}$$

Por otro lado el potencial de Higgs es

$$\begin{aligned} V &= \lambda \left(\Phi^\dagger \Phi - \frac{v^2}{2} \right)^2 \\ &= \lambda \left((\Phi_0 + \Phi_1)^\dagger (\Phi_0 + \Phi_1) - \frac{v^2}{2} \right)^2 \\ \Phi_0^\dagger \Phi_0 = \frac{v^2}{2} \rightarrow &= \lambda \left(\Phi_1^\dagger \Phi_1 + 2 \text{Re} \left(\Phi_0^\dagger \Phi_1 \right) \right)^2 \\ &= \lambda \left(\Phi_1^\dagger \Phi_1 \right)^2 + 4 \lambda \text{Re} \left(\Phi_0^\dagger \Phi_1 \right)^2 + \lambda 2 \Phi_1^\dagger \Phi_1 \text{Re} \left(\Phi_0^\dagger \Phi_1 \right). \end{aligned}$$

Reemplazando todo esto en el lagrangiano se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{\mathbf{SU}(2)} &= (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) + \lambda \left(\Phi^\dagger \Phi - \frac{v^2}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} W^a{}_{\mu\nu} W^{a\mu\nu} \\ &= \partial_\mu \Phi_1 \partial^\mu \Phi_1 + \frac{g_w^2}{4} \left(\Phi_0^\dagger T_a T_b \Phi_0 + \Phi_1^\dagger T_a T_b \Phi_1 + 2 \Phi_0^\dagger T_a T_b \Phi_1 \right) W^a{}_\mu W^{b\mu} + \dots \\ &\dots + \lambda \left(\Phi_1^\dagger \Phi_1 \right)^2 + 4 \lambda \text{Re} \left(\Phi_0^\dagger \Phi_1 \right)^2 + \lambda 2 \Phi_1^\dagger \Phi_1 \text{Re} \left(\Phi_0^\dagger \Phi_1 \right) - \frac{1}{4} W^a{}_{\mu\nu} W^{a\mu\nu} \\ T_a T_b = \mathbf{1} \text{ para } a = b \rightarrow &= \underbrace{\partial_\mu \Phi_1 \partial^\mu \Phi_1 + 4 \lambda \text{Re} \left(\Phi_0^\dagger \Phi_1 \right)^2}_{\text{Klein-Gordon?}} + \left(\sum_{i=1}^3 \frac{g_w^2}{4} \Phi_0^\dagger \Phi_0 W^i{}_\mu W^{i\mu} \right) - \frac{1}{4} W^a{}_{\mu\nu} W^{a\mu\nu} + \text{otras cosas.} \end{aligned}$$

Como se puede ver existen tres términos, uno para cada W^i , que son de la forma

$$\frac{g_w^2}{4} \Phi_0^\dagger \Phi_0 W^i{}_\mu W^{i\mu} \rightarrow i \in \{1, 2, 3\} \text{ fijo}$$

y que corresponden justamente a términos de masa. La masa de cada uno de los W^i entiendo que es

$$\begin{aligned} m_W &= \sqrt{g_w^2 \Phi_0^\dagger \Phi_0} \\ \Phi_0^\dagger \Phi_0 = \frac{v^2}{2} \rightarrow &= \frac{g_w v}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

o algo así.

Problema 3

Ítem a

En este problema se pide elegir el mínimo tal que

$$\Phi_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \rightarrow \text{Consigna}$$

y elegir

$$\Phi_1(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{h(x)}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \rightarrow \text{Consigna}$$

de modo tal que

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{v+h(x)+i\rho(x)}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \rightarrow \text{Consigna}$$

Lo anterior es medio turbio, pero bueno... Lo dice la consigna.

Ahora hay que gaugear el grupo $\mathbf{U}(1) \times \mathbf{SU}(2)$. Para ello hay que hacer

$$D_L^{(\Psi)}{}_{\mu} = \partial_{\mu} + i\frac{g'}{2}Y^{(h)}B_{\mu} + i\frac{g_w}{2}T_a W^a{}_{\mu} \rightarrow \text{Gaugear } \mathbf{U}(1) \times \mathbf{SU}(2)$$

donde $Y^{(h)} = y_h \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}$ es la hipercarga del Higgs. También hay que usar el lagrangiano

$$\mathcal{L}^{\mathbf{U}(1) \times \mathbf{SU}(2)} = (D_{\mu}\Phi)^{\dagger}(D^{\mu}\Phi) + \lambda \left(\Phi^{\dagger}\Phi - \frac{v^2}{2} \right)^2 - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{4}W^a{}_{\mu\nu}W_a{}^{\mu\nu}.$$

Desarrollaré la cuenta por pasos:

$$\begin{aligned} D_{\mu}\Phi &= \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_{\mu} \begin{bmatrix} 0 \\ h \end{bmatrix} + i\frac{g'y_h}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ v+h \end{bmatrix} B_{\mu} + i\frac{g_w}{2\sqrt{2}} \left(T_a \begin{bmatrix} 0 \\ v+h \end{bmatrix} \right) W^a{}_{\mu} \\ T_a = \sigma_a \rightarrow &= \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_{\mu} \begin{bmatrix} 0 \\ h \end{bmatrix} + i\frac{g'y_h}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ v+h \end{bmatrix} B_{\mu} + \dots \\ &\dots + i\frac{g_w}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} v+h \\ 0 \end{bmatrix} W^1{}_{\mu} + i\frac{g_w}{2\sqrt{2}}i \begin{bmatrix} -v-h \\ 0 \end{bmatrix} W^2{}_{\mu} + i\frac{g_w}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -v-h \end{bmatrix} W^3{}_{\mu} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_{\mu} \begin{bmatrix} 0 \\ h \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ v+h \end{bmatrix} \left(\frac{g'y_h}{2\sqrt{2}}B_{\mu} - \frac{g_w}{2\sqrt{2}}W^3{}_{\mu} \right) + i\frac{g_w}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} v+h \\ 0 \end{bmatrix} (W^1{}_{\mu} + iW^2{}_{\mu}). \end{aligned}$$

A continuación

$$\begin{aligned} (D_{\mu}\Phi)^{\dagger}(D^{\mu}\Phi) &= \frac{v^2}{8} (g'y_h B_{\mu} - g_w W^3{}_{\mu}) (g'y_h B^{\mu} - g_w W^{3\mu}) + \frac{g_w^2 v^2}{8} \underbrace{(W^1{}_{\mu} - iW^2{}_{\mu})}_{\sqrt{2}W^+{}_{\mu}} \underbrace{(W^1{}_{\mu} + iW^2{}_{\mu})}_{\sqrt{2}W^-{}_{\mu}} + \dots \\ &\dots + \text{términos con } h \\ &= \frac{v^2}{8} \begin{bmatrix} W^3{}_{\mu} & B_{\mu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_w^2 & -g_w g' y_h \\ -g_w g' y_h & g'^2 y_h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W^{3\mu} \\ B^{\mu} \end{bmatrix} + \frac{g_w^2 v^2}{4} W^+{}_{\mu} W^{-\mu} + \text{términos con } h. \end{aligned}$$

Reemplazando esto en el lagrangiano se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{\mathbf{U}(1) \times \mathbf{SU}(2)} &= \underbrace{\frac{v^2}{8} \begin{bmatrix} W^3{}_{\mu} & B_{\mu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_w^2 & -g_w g' y_h \\ -g_w g' y_h & g'^2 y_h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W^{3\mu} \\ B^{\mu} \end{bmatrix}}_{\text{Masas de } W^3 \text{ y } B} + \underbrace{\left(\frac{g_w v}{2} \right)^2 W^+{}_{\mu} W^{-\mu}}_{\text{Masas de } W^{\pm}} + \text{términos con } h + \dots \\ &\dots + \lambda \left(\Phi^{\dagger}\Phi - \frac{v^2}{2} \right)^2 - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{4}W^a{}_{\mu\nu}W_a{}^{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Véase que como $W^+ = (W^-)^*$ entonces el término con $W^+{}_{\mu} W^{-\mu}$ es un término de masa para el bosón W con masa [Halzen and Martin, 2008, eq. (15.18)]

$$m_W = \frac{v g_w}{2}.$$

En cuanto a las masas de W^3 y B , éstas se obtienen de las diagonales de la matriz. El argumento que sigue no lo termino de ver pero Halzen lo usa [Halzen and Martin, 2008, p. 336]. Parece que

$$\begin{aligned} \frac{v^2}{8} \begin{bmatrix} W^3{}_{\mu} & B_{\mu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_w^2 & -g_w g' y_h \\ -g_w g' y_h & g'^2 y_h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W^{3\mu} \\ B^{\mu} \end{bmatrix} &\equiv \begin{bmatrix} Z_{\mu} & A_{\mu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{m_Z^2}{2} & \\ & \frac{m_A^2}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z^{\mu} \\ A^{\mu} \end{bmatrix} \\ \frac{v^2}{8} g_w^2 W^3{}_{\mu} W^{3\mu} + \frac{v^2 g'^2 y_h^2}{8} B_{\mu} B^{\mu} - 2 \frac{v^2 g_w g' y_h}{8} B_{\mu} W^{3\mu} &= \frac{m_Z^2}{2} Z_{\mu} Z^{\mu} + \frac{m_A^2}{2} A_{\mu} A^{\mu} \\ \frac{v^2}{8} (g_w W^3{}_{\mu} - g' y_h B_{\mu}) (g_w W^{3\mu} - g' y_h B^{\mu}) &= \end{aligned}$$

y como $m_A \equiv 0$ entonces

$$g_w W^3_\mu - g' y_h B_\mu \propto Z_\mu.$$

Ahora no tengo idea por qué normaliza del siguiente modo pero la conclusión de Halzen es que

$$\begin{cases} A_\mu = \frac{g' y_h W^3_\mu + g_w B_\mu}{\sqrt{g_w^2 + g'^2 y_h^2}} \\ Z_\mu = \frac{g_w W^3_\mu - g' y_h B_\mu}{\sqrt{g_w^2 + g'^2 y_h^2}} \end{cases} \quad \begin{cases} m_A = 0 \\ m_Z = \frac{v}{2} \sqrt{g_w^2 + g'^2 y_h^2}. \end{cases}$$

Ítem b

De la guía anterior se sabe lo siguiente

$$\text{Guía anterior} \rightarrow \begin{cases} Z_\mu = -B_\mu \sin \theta_W + W^3_\mu \cos \theta_W \\ g' \cos \theta_W = g_w \sin \theta_W = e \end{cases}$$

por lo tanto

$$Z_\mu = \frac{e}{g'} W^3_\mu - \frac{e}{g_w} B_\mu.$$

Sabiendo además que $Z_\mu = \frac{g_w W^3_\mu - g' y_h B_\mu}{\sqrt{g_w^2 + g'^2 y_h^2}}$ entonces

$$\begin{cases} \frac{e}{g'} = \frac{g_w}{\sqrt{g_w^2 + g'^2 y_h^2}} \\ \frac{e}{g_w} = \frac{g' y_h}{\sqrt{g_w^2 + g'^2 y_h^2}} \end{cases}.$$

Dividiendo ambas ecuaciones se encuentra que [Halzen and Martin, 2008, p. 334]

$$y_h = 1.$$

Problema 4

En el problema previo se encontró que

$$\text{Ya se sabe} \rightarrow \begin{cases} m_Z = \frac{v}{2} \sqrt{g_w^2 + g'^2} \\ m_W = \frac{v g_w}{2} \end{cases}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{m_W^2}{m_Z^2} &= \frac{g_w^2}{g_w^2 + g'^2} \\ g' \cos \theta_W = g_w \sin \theta_W = e &\rightarrow = \frac{\frac{e^2}{\sin^2 \theta_W}}{\frac{e^2}{\sin^2 \theta_W} + \frac{e^2}{\cos^2 \theta_W}} \\ &= \frac{1}{1 + \tan^2 \theta_W} \\ \text{Alguna identidad mágica} &\rightarrow = \cos^2 \theta_W \end{aligned}$$

donde en el último paso usé una identidad mágica que probé gráficamente (ver [este link](#)).

Problema 5

Sabiendo que $Y_h = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}$ y que $\sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix}$ entonces

$$e^{i(\alpha \frac{Y}{2} + \beta \frac{\sigma_3}{2})} = \exp \left(i \begin{bmatrix} \frac{\alpha+\beta}{2} & \\ & \frac{\alpha-\beta}{2} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} e^{i \frac{\alpha+\beta}{2}} & \\ & e^{i \frac{\alpha-\beta}{2}} \end{bmatrix}.$$

La transformación del doblete es

$$e^{i(\alpha \frac{Y}{2} + \beta \frac{\sigma_3}{2})} \Phi = \begin{bmatrix} e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} & \\ & e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{v+h}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{v+h}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Si esta elección de Φ es invariante frente a esta transformación entonces es necesario pedir que

$$\alpha = \beta.$$

La transformación resulta ser entonces

$$\Phi \rightarrow \Phi' = \begin{bmatrix} e^{i\alpha} & \\ & 1 \end{bmatrix} \Phi$$

y es una transformación $\mathbf{U}(1)$ local para la componente “de arriba” y la identidad para la componente “de abajo”. La transformación $\mathbf{U}(1)$ local está asociada a la interacción eléctrica. En [Halzen and Martin, 2008, p. 335] hay una discusión por parte de un tipo que la tiene mucho más clara que cualquiera de nosotros.

Problema 6 ($\mathbf{U}(1)_Y \times \mathbf{SU}(2)_L$, Higgs para fermiones)

Ítem a

Leptones La forma de darle masa a los fermiones es distinta para leptones y para quarks. Esto es porque, como bien sabemos, los neutrinos no tienen masa en el modelo estándar. Aparentemente para los leptones lo que funciona es

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs para leptones}} = \overline{\Psi}_L \Phi \psi_R + \overline{\psi}_R \Phi^\dagger \Psi_L$$

donde $\Psi = \begin{bmatrix} \nu \\ \psi \end{bmatrix}$ es un doblete de leptones y $\Phi = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix}$ es el doblete ese de Higgs que veníamos usando. La transformación $\mathbf{SU}(2)_L \times \mathbf{U}(1)_Y$ implica que las cosas transformen según

$$\text{Transformación } \mathbf{U}(1)_Y \times \mathbf{SU}(2)_L \rightarrow \begin{cases} \Psi_L \rightarrow \Psi'_L = e^{-i\frac{g_w}{2} Y_L \beta - i\frac{g'}{2} \sigma_a \alpha^a} \Psi_L \\ \Psi_R \rightarrow \Psi'_R = e^{-i\frac{g_w}{2} Y_R \beta} \Psi_R \\ \Phi \rightarrow \Phi' = e^{-i\frac{g_w}{2} Y_h \beta - i\frac{g'}{2} \sigma_a \alpha^a} \Phi \end{cases}$$

donde β es el parámetro asociado al grupo $\mathbf{U}(1)$ y α^a los parámetros asociados al grupo $\mathbf{SU}(2)$. (Para el Φ' me basé en [Thomson, 2013, sec. 17.5.5].) Usando las hipercargas conocidas para los leptones y para el Higgs (ver box 27) esto es

$$\text{Así transforman los leptones} \rightarrow \begin{cases} \Psi'_L = e^{i\frac{g_w}{2} \beta} e^{-i\frac{g'}{2} \sigma_a \alpha^a} \Psi_L \\ \Psi'_R = \begin{bmatrix} 1 & \\ & e^{ig_w \beta} \end{bmatrix} \Psi_R \\ \Phi' = e^{-i\frac{g_w}{2} \beta} e^{-i\frac{g'}{2} \sigma_a \alpha^a} \Phi \end{cases}.$$

Obsérvese que en el lagrangiano no aparece Ψ_R sino ψ_R , que es la “componente de abajo” de Ψ_R y transforma

$$\psi'_R = e^{ig_w \beta} \psi_R. \rightarrow \text{No es un doblete!}$$

El lagrangiano transformado es, entonces,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_{\text{Higgs para leptones}} &= \overline{\Psi}_L e^{-i\frac{g_w}{2} \beta} e^{i\frac{g'}{2} \sigma_a \alpha^a} e^{-i\frac{g_w}{2} \beta} e^{-i\frac{g'}{2} \sigma_a \alpha^a} \Phi e^{ig_w \beta} \psi_R + \dots \\ &\dots + \overline{\psi}_R e^{-ig_w \beta} \Phi^\dagger e^{i\frac{g'}{2} \sigma_a \alpha^a} e^{i\frac{g_w}{2} \beta} e^{i\frac{g'}{2} \sigma_a \alpha^a} \Psi_L \\ &= \mathcal{L}_{\text{Higgs para leptones}} \checkmark. \end{aligned}$$

Quarks (no me dio) Ya que estamos la hago completa. De acuerdo con la consigna

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Higgs para quarks}} &= \overline{\Psi}_R (h+v) \Psi_L + \overline{\Psi}_L (h+v) \Psi_R \\ \Phi = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{h+v}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} &\rightarrow = (\overline{\Psi}_R \Psi_L + \overline{\Psi}_L \Psi_R) \sqrt{2\Phi^\dagger \Phi} \\ \left. \begin{aligned} \Psi_L &= P_L \Psi \\ \Psi_R &= P_R \Psi \\ \overline{\Psi}_L &= \overline{\Psi} P_R \\ \overline{\Psi}_R &= \overline{\Psi} P_L \end{aligned} \right\} &\rightarrow = (\overline{\Psi} P_L^2 \Psi + \overline{\Psi} P_R^2 \Psi) \sqrt{2\Phi^\dagger \Phi} \\ \left. \begin{aligned} P_R^2 &= P_R \\ P_L^2 &= P_L \end{aligned} \right\} &\rightarrow = \overline{\Psi} (P_L + P_R) \Psi \sqrt{2\Phi^\dagger \Phi} \\ P_L + P_R = \mathbb{1} &\rightarrow = \overline{\Psi} \Psi \sqrt{2\Phi^\dagger \Phi}. \end{aligned}$$

donde $\Psi = \begin{bmatrix} u \\ d \end{bmatrix}$ es un doblete con un *up-type quark* y un *down-type quark* (no necesariamente u y d) y $\Phi = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{h+v}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$. Si no estoy malentendiendo las cosas debería tener la misma simetría que el de leptones, es decir simetría ante una transformación $U(1)_Y \times SU(2)_L$. En el caso de los quarks hay que usar la hipercarga de éstos (ver box 27) y entonces la transformación resulta

$$\text{Así transforman los quarks} \rightarrow \begin{cases} \Psi_L \rightarrow \Psi'_L = e^{-i\frac{q_W}{6}\beta} e^{-\frac{q'}{2}\sigma_a \alpha^a} \Psi_L \\ \Psi_R \rightarrow \Psi'_R = \begin{bmatrix} e^{-i\frac{2q_W}{3}\beta} & \\ & e^{i\frac{q_W}{3}\beta} \end{bmatrix} \Psi_R \\ \Phi \rightarrow \Phi' = e^{-i\frac{q_W}{2}\beta} e^{-i\frac{q'}{2}\sigma_a \alpha^a} \Phi \end{cases}$$

En consecuencia la transformación del Lagrangiano es

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_{\text{Higgs para quarks}} &= (\overline{\Psi}'_R \Psi'_L + \overline{\Psi}'_L \Psi'_R) \sqrt{2\Phi'^\dagger \Phi'} \leftarrow \text{Conviene usar esta expresión} \\ &= \left(\overline{\Psi}_R \begin{bmatrix} e^{i\frac{2q_W}{3}\beta} & \\ & e^{-i\frac{q_W}{3}\beta} \end{bmatrix} e^{-i\frac{q_W}{6}\beta} e^{-\frac{q'}{2}\sigma_a \alpha^a} \Psi_L + \overline{\Psi}_L e^{i\frac{q_W}{6}\beta} e^{\frac{q'}{2}\sigma_a \alpha^a} \begin{bmatrix} e^{-i\frac{2q_W}{3}\beta} & \\ & e^{i\frac{q_W}{3}\beta} \end{bmatrix} \Psi_R \right) \sqrt{2\Phi^\dagger \Phi} \\ &= ?. \end{aligned}$$

Bueno, parece que no era así...

Ítem b

Entiendo que este punto no es más que desarrollar los términos del lagrangiano para leptones. Esto es

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Higgs para leptones}} &= \overline{\Psi}_L \Phi \psi_R + \overline{\psi}_R \Phi^\dagger \Psi_L \leftarrow \text{Consigna} \\ \left. \begin{aligned} \Phi &= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{h+v}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\ \Psi &= \begin{bmatrix} \nu \\ \psi \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} &\rightarrow = \frac{h+v}{\sqrt{2}} \overline{\psi}_R \psi_R + \frac{h+v}{\sqrt{2}} \overline{\psi}_L \psi_L \\ \left. \begin{aligned} \Psi_L &= P_L \Psi \\ \Psi_R &= P_R \Psi \\ \overline{\Psi}_L &= \overline{\Psi} P_R \\ \overline{\Psi}_R &= \overline{\Psi} P_L \end{aligned} \right\} &\rightarrow = \frac{h+v}{\sqrt{2}} (\overline{\psi} P_R^2 \psi + \overline{\psi} P_L^2 \psi) \\ \left. \begin{aligned} P_R^2 &= P_R \\ P_L^2 &= P_L \end{aligned} \right\} &\rightarrow = \frac{h+v}{\sqrt{2}} \overline{\psi} (P_R^2 + P_L^2) \psi \\ P_L + P_R = \mathbb{1} &\rightarrow = \frac{h+v}{\sqrt{2}} \overline{\psi} \psi \checkmark. \end{aligned}$$

Problema 7

Para encontrar las autointeracciones y la masa del Higgs hay que desarrollar el potencial

$$V(\Phi) = \lambda \left(\Phi^\dagger \Phi - \frac{v^2}{2} \right)^2$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{h+v}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \rightarrow = \lambda v^2 h^2 + \lambda v h^3 + \frac{\lambda}{4} h^4.$$

Por otro lado

$$(D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) = \left(\left[\partial_\mu + i \frac{g'}{2} Y_h B_\mu + i \frac{g_w}{2} T_a W^a_\mu \right] \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{h+v}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \right)^\dagger \left(\left[\partial^\mu + i \frac{g'}{2} Y_h B^\mu + i \frac{g_w}{2} T_a W^{a\mu} \right] \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{h+v}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h + \text{stuff.}$$

Entonces

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}} = (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - \lambda \left(\Phi^\dagger \Phi - \frac{v^2}{2} \right)^2 + \bar{\Psi}_L \Phi \psi_R + \bar{\psi}_R \Phi^\dagger \Psi_L + \mathcal{L}_{\text{Higgs} \cup \text{quarks}}$$

$$= \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h - \lambda v^2 h^2 - \lambda v h^3 - \frac{\lambda}{4} h^4 + \text{otras cosas que no me interesan ahora}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} (\partial_\mu h \partial^\mu h - 2\lambda v^2 h^2)}_{\text{Klein-Gordon}} - \lambda v h^3 - \frac{\lambda}{4} h^4 + \text{otras cosas}$$

donde reconocemos el lagrangiano de Klein-Gordon por lo tanto la masa del Higgs es [Halzen and Martin, 2008, eq. 15.39]

$$m_h = \sqrt{2\lambda} v.$$

Las autointeracciones de h son las que dejé explícitas con h^3 y h^4 .

Problema 8

Box 19 - Diagramas de Feynman para dummies

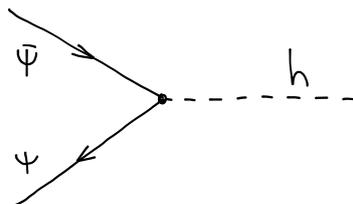
Si no sabes cómo funciona todo eso de los diagramas de Feynman, quizá te pueda servir [Diagramas de Feynman para Dummies](#) escrito por Alf en sus [resueltos de QFT](#), problemas de las guías + parciales.

Los vértices se obtienen de

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}} = (D_{h\mu} \Phi)^\dagger (D_h{}^\mu \Phi) - \lambda \left(\Phi^\dagger \Phi - \frac{v^2}{2} \right)^2 + \bar{\Psi}_L \Phi \psi_R + \bar{\psi}_R \Phi^\dagger \Psi_L + \mathcal{L}_{\text{Higgs} \cup \text{quarks}}$$

donde $D_{h\mu} = \partial_\mu + i \frac{g'}{2} Y_h B_\mu + i \frac{g_w}{2} T_a W^a_\mu$ con $Y_h = 1$. De aquí se obtiene lo siguiente:

Higgs-fermión A partir de $\bar{\Psi}_L \Phi \psi_R$ se se obtienen términos de la forma “ $h\bar{\psi}\psi$ ” donde ψ es un fermión (no un doblete) para todos los *down-type leptons*, i.e. e, μ y τ . Para los quarks, según dijeron en la práctica, ocurre algo similar. Entonces los vértices que mezclan Higgs con fermiones son todos de la forma



con ψ cualquier fermión con excepción de los neutrinos.

Higgs-campo de gauge Estos acoplamientos surgen de desarrollar $(D_{h\mu}\Phi)^\dagger (D_h^\mu\Phi)$. Se puede desarrollar toda la cuenta pero es un bajón. Procederé a **ojímetro**. Debido a que $D \sim \partial + B + W$ y a que $\Phi \sim v + h(x)$ entonces

$$\begin{aligned} (D_{h\mu}\Phi)^\dagger (D_h^\mu\Phi) &\sim ((\partial + B + W)(v + h))^2 \\ &\sim (v(B + W) + \partial h + h(B + W))^2 \\ &\sim hv(B + W)^2 + h^2(B + W)^2 + \text{otras cosas.} \end{aligned}$$

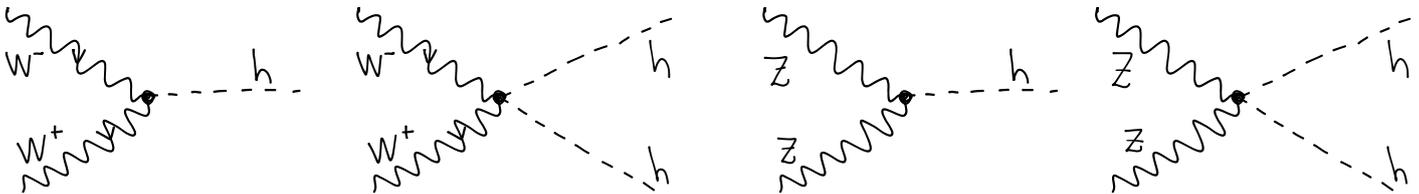
Ahora sabemos que B y W se van a convertir en A, Z, W^\pm y también sabemos que A no se acopla al Higgs. Entonces sustituimos

$$(B + W)^2 \rightarrow W^{\pm 2} + Z^2$$

y entonces

$$\begin{aligned} (D_{h\mu}\Phi)^\dagger (D_h^\mu\Phi) &\sim hv(W^{\pm 2} + Z^2) + h^2(W^{\pm 2} + Z^2) \\ &\sim hvW^\pm W^\pm + hvZZ + h^2W^\pm W^\pm + h^2ZZ \end{aligned}$$

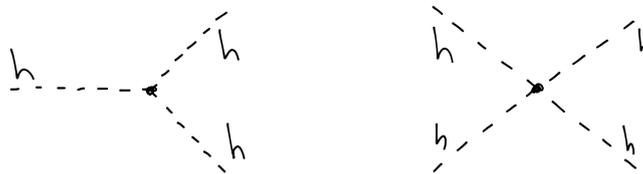
que son cuatro vértices de interacción entre h y los bosones de gauge. Estos vértices son de la forma:



Higgs-Higgs El acoplamiento del Higgs con **suí mismo** se obtiene al desarrollar el potencial de Higgs $V(\Phi) = \lambda(\Phi^\dagger\Phi - \frac{v^2}{2})^2$. Esto ya se hizo previamente y se encontró que

$$V(\Phi) = \lambda v^2 h^2 + \lambda v h^3 + \frac{\lambda}{4} h^4$$

por lo tanto hay dos vértices de auto-interacción



Box 20 - ¿Sabías que...

... **Murray Gell-Mann** siempre se refirió a los diagramas de Feynman como “diagramas de Stueckelberg” argumentando que fue **Ernst Stueckelberg** quien los inventó tiempo antes que **Richard Feynman**? [Wikipedia](#) lo dice...

Fórmulas

Box 21 - Fórmulas matemáticas

$$(e^A)^\dagger = e^{A^\dagger} \quad \det e^A = e^{\text{Tr}A} \quad \frac{d}{dx} e^{xA} = A e^{xA} \quad e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\dots} \quad (e^A)^{-1} = e^{-A}$$

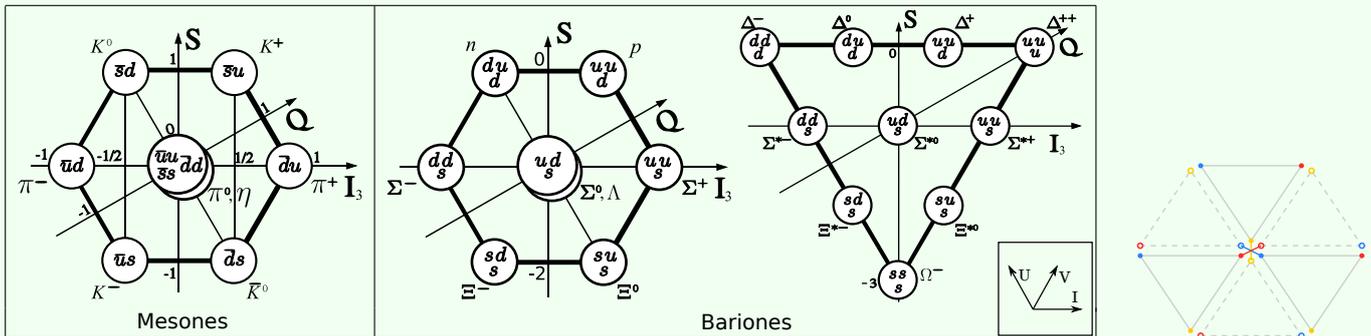
$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$$

Box 22 - Fórmulas relatividad

$$p^\mu \sim \begin{bmatrix} E/c \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = m\gamma \begin{bmatrix} c \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} \sim \underbrace{\begin{bmatrix} i\partial^0 \\ -i\nabla \end{bmatrix}}_{\text{En cuántica}} \quad \frac{E^2}{c^2} = \mathbf{p}^2 + m^2 c^2 \quad \begin{cases} \beta = \frac{v}{c} \\ \gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_\mu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \\ \partial^\mu \stackrel{\text{def}}{=} \eta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \sim \begin{bmatrix} \partial_t \\ -\nabla \end{bmatrix} \end{cases} \quad \square^2 = \partial^\mu \partial_\mu \quad x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu \quad \begin{cases} x^\mu \sim \begin{bmatrix} t \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} & \text{Contravariante} \\ x_\mu \sim \begin{bmatrix} t \\ -\mathbf{x} \end{bmatrix} & \text{Covariante} \end{cases}$$

Box 23 - Fórmulas isospín y SU(3)



$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}_S \oplus \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}_{MA} \oplus \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}_{MS}$$

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 10_S \oplus 8_{MA} \oplus 8_{MS} \oplus 1_A$$

$$\begin{aligned} [\overline{\Lambda}_i, \overline{\Lambda}_j] &= i f_{ijk} \overline{\Lambda}_k \\ \overline{\Lambda}_i &\sim \begin{cases} \lambda_i & \text{En quarks} \\ \bar{\lambda}_i = -\lambda_i^* & \text{En antiquarks} \end{cases} \end{aligned} \quad \begin{cases} f_{123} = 1 \\ f_{147} = -f_{156} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = -f_{367} = \frac{1}{2} \\ f_{458} = f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ f_{ijk} = -f_{jik} = -f_{ikj} \text{ etc.} \end{cases} \quad \begin{cases} \overline{T}_\pm = \frac{\overline{\Lambda}_1 \pm i \overline{\Lambda}_2}{2} \\ \overline{U}_\pm = \frac{\overline{\Lambda}_6 \pm i \overline{\Lambda}_7}{2} \\ \overline{V}_\pm = \frac{\overline{\Lambda}_4 \pm i \overline{\Lambda}_5}{2} \end{cases}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{Quarks} \rightarrow \begin{cases} \overline{I}_+ \begin{pmatrix} |u\rangle \\ |d\rangle \\ |s\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ |u\rangle \\ 0 \end{pmatrix} & \overline{U}_+ \begin{pmatrix} |u\rangle \\ |d\rangle \\ |s\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ |d\rangle \end{pmatrix} & \overline{V}_+ \begin{pmatrix} |u\rangle \\ |d\rangle \\ |s\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ |u\rangle \end{pmatrix} \\
 \overline{I}_- \begin{pmatrix} |u\rangle \\ |d\rangle \\ |s\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |d\rangle \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \overline{U}_- \begin{pmatrix} |u\rangle \\ |d\rangle \\ |s\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ |s\rangle \\ 0 \end{pmatrix} & \overline{V}_- \begin{pmatrix} |u\rangle \\ |d\rangle \\ |s\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |s\rangle \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{cases} \\
 \text{Antiquarks} \rightarrow \begin{cases} \overline{I}_+ \begin{pmatrix} |\bar{u}\rangle \\ |\bar{d}\rangle \\ |\bar{s}\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -|\bar{d}\rangle \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \overline{U}_+ \begin{pmatrix} |\bar{u}\rangle \\ |\bar{d}\rangle \\ |\bar{s}\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -|\bar{s}\rangle \\ 0 \end{pmatrix} & \overline{V}_+ \begin{pmatrix} |\bar{u}\rangle \\ |\bar{d}\rangle \\ |\bar{s}\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -|\bar{s}\rangle \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \overline{I}_- \begin{pmatrix} |\bar{u}\rangle \\ |\bar{d}\rangle \\ |\bar{s}\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -|\bar{u}\rangle \\ 0 \end{pmatrix} & \overline{U}_- \begin{pmatrix} |\bar{u}\rangle \\ |\bar{d}\rangle \\ |\bar{s}\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -|\bar{d}\rangle \end{pmatrix} & \overline{V}_- \begin{pmatrix} |\bar{u}\rangle \\ |\bar{d}\rangle \\ |\bar{s}\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -|\bar{u}\rangle \end{pmatrix}
 \end{cases}
 \end{array}$$

Box 24 - Fórmulas de ecuaciones de onda relativistas

Klein-Gordon

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \phi = 0$$

Dirac

$$\begin{cases} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0 \\ \overline{\psi} (\overleftarrow{\partial}_\mu \gamma^\mu + m) = 0 \end{cases} \quad \overline{\psi} \stackrel{\text{def}}{=} \psi^\dagger \gamma^0 \quad \overline{\mathcal{H}}_{\text{Dirac libre}} = \gamma^0 m + \gamma^0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \underline{\mathbf{p}} \quad J^\mu = \overline{\psi} \gamma^\mu \psi \quad \partial_\mu J^\mu = 0$$

$$\text{Soluciones base Dirac} \rightarrow \begin{cases} u_i = e^{-ikx} \begin{bmatrix} \xi_i \\ \frac{\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{k^0 + m} \xi_i \end{bmatrix} & E > 0 \\ v_i = e^{ikx} \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{k^0 + m} \xi_i \\ \xi_i \end{bmatrix} & E < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \xi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \xi_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases} \quad \text{Espín} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{S} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma} \\ \boldsymbol{\Sigma} \sim \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{bmatrix} \end{cases}$$

$ \begin{cases} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \mathbf{1} \leftarrow \text{Clifford} \\ (\gamma^\mu)^2 = \mathbf{1} \eta^{\mu\mu} \\ (\gamma^\mu)^\dagger = \begin{cases} -\gamma^\mu & \text{para } \mu \neq 0 \\ \gamma^\mu & \text{para } \mu = 0 \end{cases} \\ (\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \\ \gamma^5 \stackrel{\text{def}}{=} i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \quad (\gamma^5)^2 = \mathbf{1} \\ \{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0 \end{cases} $	Base de Dirac $ \gamma^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \\ & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \quad \gamma^i = \begin{bmatrix} & \sigma_i \\ -\sigma_i & \end{bmatrix} $	Base de Weyl $ \gamma^0 = \begin{bmatrix} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \end{bmatrix} \quad \gamma^i = \begin{bmatrix} & \sigma_i \\ -\sigma_i & \end{bmatrix} $
	$ \sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} [\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk} \sigma_k \\ \{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij} \mathbf{1} \end{cases} $	

$$S_\Lambda^{-1} \gamma^\mu S_\Lambda = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu \quad \begin{cases} [\Psi']_{x'} = S_\Lambda [\Psi]_{x(x')} \\ [\overline{\Psi}']_{x'} = [\overline{\Psi}]_{x(x')} S_\Lambda^{-1} \end{cases} \quad S_\Lambda = \exp\left(-\frac{i}{2} \omega_{\alpha\beta} \Sigma^{\alpha\beta}\right) \quad \Sigma^{\alpha\beta} = \frac{i}{4} [\gamma^\alpha, \gamma^\beta] \quad \omega_{\alpha\beta} \sim \begin{bmatrix} 0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ -\xi_1 & 0 & \theta_3 & \theta_2 \\ -\xi_2 & -\theta_3 & 0 & \theta_1 \\ -\xi_3 & -\theta_2 & -\theta_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Parity operator} \rightarrow \begin{cases} \mathcal{P}\psi \stackrel{\text{def}}{=} \gamma^0 \psi(t, -\mathbf{x}) \\ \mathcal{P}\overline{\psi} = \overline{\psi}(t, -\mathbf{x}) \gamma^0 \end{cases} \quad \gamma^5 = i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \rightarrow \text{Quiralidad} \quad P_\pm = \frac{\mathbf{1} \pm \gamma^5}{2} \quad h = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \rightarrow \text{Helicidad}$$

Box 25 - Fórmulas de formulación lagrangiana

$$\text{Noether} \rightarrow \begin{cases} \varepsilon J^\mu = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \delta \phi_i(\varepsilon) + F(\varepsilon)^\mu \\ \delta \mathcal{L} = \partial_\mu F^\mu \quad \varepsilon \rightarrow 0 \text{ es el parámetro} \end{cases} \quad \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \quad \begin{matrix} \mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \bar{\Psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi \\ \mathcal{L}_{\text{KG}} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi \end{matrix}$$

Box 26 - Fórmulas gauge no abeliano

$$\begin{aligned} D_\mu &\stackrel{\text{def}}{=} \partial_\mu + igA_\mu & \Omega &\stackrel{\text{def}}{=} \exp(-ig\alpha^a(x)T_a) & D'_\mu &= \Omega D_\mu \Omega^{-1} & A_\mu &\equiv A^a_\mu T_a & A'^a_\mu &= A^a_\mu - \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha^a \\ T_a^\dagger &= T_a & [T_a, T_b] &= if_{abc} T^c & f_{abc} &\text{totalmente antisimétrico para } \mathfrak{su}(N) \\ A'_\mu &= \Omega A_\mu \Omega^{-1} - \frac{1}{ig} (\partial_\mu \Omega) \Omega^{-1} \Rightarrow (A^a_\mu)' &= A^a_\mu + \partial_\mu \alpha^a + g\alpha^b A^c_\mu f^a_{bc} \\ G_{\mu\nu} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{ig} [D_\mu, D_\nu] \equiv F_{\mu\nu} + ig[A_\mu, A_\nu] = G^a_{\mu\nu} T_a = \mathbf{G}_{\mu\nu} \cdot \mathbf{T} \\ G^a_{\mu\nu} &= \partial_\mu G^a_\nu - \partial_\nu G^a_\mu - gf^a_{bc} G^b_\mu G^c_\nu & (G^a_\mu)' &= G^a_\mu - \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha^a - f^a_{bc} \alpha_b G_{c\mu} & (G_{\mu\nu})' &= \Omega G_{\mu\nu} \Omega^{-1} \\ \mathcal{L}_{\text{YM}} &= (D^\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi) - m^2 \Phi^\dagger \Phi - \frac{1}{2} \text{Tr}(G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}) \end{aligned}$$

Box 27 - Fórmulas modelo estándar

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{\text{QCD}} = \sum_{q \in \text{quarks}} (\bar{q} i \gamma^\mu D_{S\mu} q) - \frac{1}{4} G^a_{\mu\nu} G_a{}^{\mu\nu} \\ \mathcal{L}_{\text{EW}} = \sum_{\Psi \in \text{dobletes E.W.}} (\bar{\Psi}_L i \gamma^\mu D_L^{(\Psi)} \Psi_L + \bar{\Psi}_R i \gamma^\mu D_R^{(\Psi)} \Psi_R) - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - \frac{1}{4} W^a_{\mu\nu} W_a{}^{\mu\nu} \\ \mathcal{L}_{\text{Higgs}} = (D_{h\mu} \Phi)^\dagger (D_h{}^\mu \Phi) - \lambda \left(\Phi^\dagger \Phi - \frac{v^2}{2} \right)^2 + \underbrace{G_e (\bar{\Psi}_L \Phi \psi_R + \bar{\psi}_R \Phi^\dagger \Psi_L)}_{\text{Leptones}} + \underbrace{G_u \left(\bar{q}_L \frac{h+v}{\sqrt{2}} q_R + \bar{q}_R \frac{h+v}{\sqrt{2}} q_L \right)}_{\text{Quarks}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{quarks} = \{u, d, c, s, t, b\} & u \equiv \begin{bmatrix} u_{\text{red}} \\ u_{\text{green}} \\ u_{\text{blue}} \end{bmatrix}, d = \dots \\ \text{dobletes E.W.} = \left\{ \begin{bmatrix} \nu_e \\ e \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u \\ d' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ s' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} t \\ b' \end{bmatrix} \right\} & \begin{bmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & a & b \\ i & b & b \\ \ominus & o & \ominus \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ s \\ b \end{bmatrix} \\ \Phi = \begin{bmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2, \Phi \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{h+v}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\text{Gauge fields} \rightarrow \begin{cases} B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu & \rightarrow B \text{ field } \exists! \\ W^a_{\mu\nu} \sim \mathbf{W}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{W}_\nu - \partial_\nu \mathbf{W}_\mu - g \mathbf{W}_\mu \times \mathbf{W}_\nu & \rightarrow \text{Weakons } a \in \{1, 2, 3\} \\ G^a_{\mu\nu} = \partial_\mu G^a_\nu - \partial_\nu G^a_\mu - gf^a_{bc} G^b_\mu G^c_\nu & \rightarrow \text{Glucos } a \in \{1, \dots, 8\} \end{cases}$$

$$\text{Notaciones habituales} \rightarrow \begin{cases} W_{\mu\nu} \equiv W^a_{\mu\nu} \sigma_a \equiv \mathbf{W}_{\mu\nu} \cdot \boldsymbol{\sigma} \\ G^a_{\mu\nu} \equiv G^a_{\mu\nu} \lambda_a \end{cases} \quad \begin{cases} W^a_{\mu\nu} W_a{}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \text{Tr}(W_{\mu\nu} W^{\mu\nu}) \\ G^a_{\mu\nu} G_a{}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \text{Tr}(G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}) \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \text{Strong gauge: } D_{S\mu} = \partial_\mu + i\frac{g_s}{2}G_\mu^a \lambda_a \quad [T_a, T_b] = if_{abc}T^c \Rightarrow T_{\text{strong}} = \lambda, T_{\text{weak}} = \sigma \\
 \text{Electroweak gauge: } \begin{cases} D_L^{(\Psi)} = \partial_\mu + i\frac{g'}{2}Y_L^{(\Psi)}B_\mu + i\frac{g_w}{2}\sigma_a W_\mu^a \rightarrow \text{Left components} \\ D_R^{(\Psi)} = \partial_\mu + i\frac{g'}{2}Y_R^{(\Psi)}B_\mu \rightarrow \text{Right components} \end{cases} \\
 \text{Higgs gauge: } D_{h\mu} = \partial_\mu + i\frac{g'}{2}Y_h B_\mu + i\frac{g_w}{2}\sigma_a W_\mu^a
 \end{array} \right.$$

$$\text{Hypercharge} \rightarrow \begin{cases} Y_L^{(\Psi)} = \begin{bmatrix} y_{L1}^{(\Psi)} \\ y_{L2}^{(\Psi)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 & Y_L^{(\text{leptones})} = \begin{bmatrix} -1 & \\ & -1 \end{bmatrix} & Y_R^{(\text{leptones})} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \\ Y_R^{(\Psi)} = \begin{bmatrix} y_{R1}^{(\Psi)} \\ y_{R2}^{(\Psi)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 & Y_L^{(\text{quarks})} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \\ & \frac{1}{3} \end{bmatrix} & Y_R^{(\text{quarks})} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \\ Y_h = \mathbb{1} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} B_\mu \\ W_\mu^3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \theta_W & -\sin \theta_W \\ \sin \theta_W & \cos \theta_W \end{bmatrix}}_{M^{-1}=M^T} \begin{bmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} W_\mu^1 \\ W_\mu^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_\mu^+ \\ W_\mu^- \end{bmatrix} \quad \begin{cases} \Psi_L = P_L \Psi \\ \Psi_R = P_R \Psi \end{cases} \quad \begin{cases} P_L = \frac{1 - \gamma^5}{2} \\ P_R = \frac{1 + \gamma^5}{2} \end{cases}$$

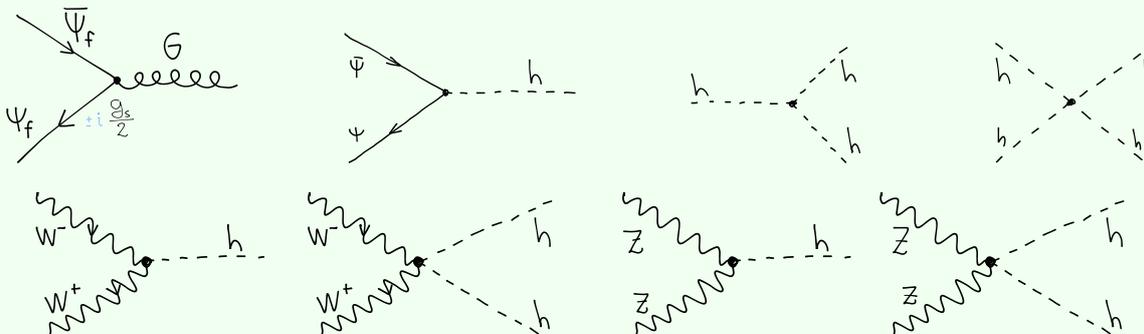
$$|e| = g' \cos \theta_W = g_w \sin \theta_W = Q_\psi - Q_\nu \quad \mathcal{L} = \dots + Q_\psi \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu + \dots$$

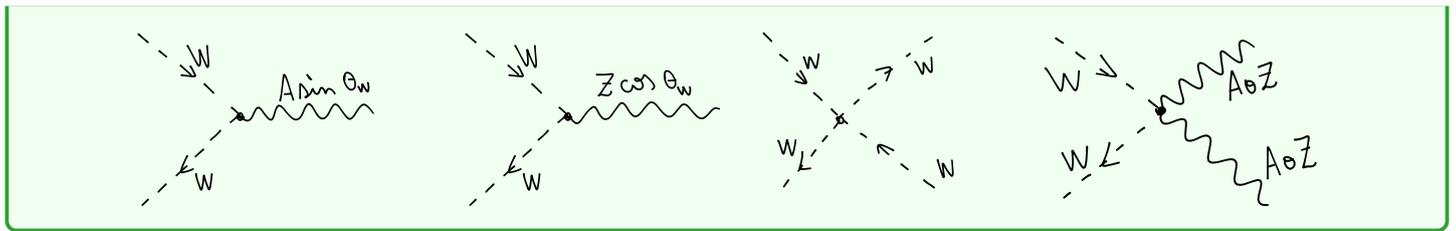
$Q_{\text{up-type}}^{\text{lepton}} = 0$	$Q_{\text{up-type}}^{\text{quark}} = -\frac{2}{3} e $
$Q_{\text{down-type}}^{\text{lepton}} = e $	$Q_{\text{down-type}}^{\text{quark}} = \frac{1}{3} e $

$$m_W = \frac{v g_w}{2} \quad m_z = \frac{v}{2} \sqrt{g_w^2 + g'^2} \quad m_A = 0 \quad m_e = \frac{G_e v}{\sqrt{2}}$$

Box 28 - Vértices modelo estándar

$\bar{\Psi}_L i \gamma^\mu D_L^{(\Psi)} \Psi_L + \bar{\Psi}_R i \gamma^\mu D_R^{(\Psi)} \Psi_R$ para leptones			$\bar{\Psi}_L i \gamma^\mu D_L^{(\Psi)} \Psi_L + \bar{\Psi}_R i \gamma^\mu D_R^{(\Psi)} \Psi_R$ para quarks		
$e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu$	$(-\frac{g_w}{\sqrt{2}}) \bar{\nu}_L \gamma^\mu \psi_L W_\mu^+$	$(-\frac{g_w}{\sqrt{2}}) \bar{\psi}_L \gamma^\mu \nu_L W_\mu^-$	$(-\frac{2}{3}e) \bar{u} \gamma^\mu u A_\mu / (\frac{e}{3} \bar{d} \gamma^\mu d A_\mu)$	$(\frac{2g' \sin \theta_W}{3}) \bar{u}_R \gamma^\mu u_R Z_\mu / (\frac{g' \sin \theta_W}{3}) \bar{d}_R \gamma^\mu d_R Z_\mu$	$(\frac{g' \sin \theta_W}{6} + \frac{g_w \cos \theta_W}{2}) \bar{u}_L \gamma^\mu d_L Z_\mu$
$(\frac{g' \sin \theta_W}{2} - \frac{g_w \cos \theta_W}{2}) \bar{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L Z_\mu$	$(-g' \sin \theta_W) \bar{\psi}_R \gamma^\mu \psi_R Z_\mu$	$(\frac{g' \sin \theta_W}{2} + \frac{g_w \cos \theta_W}{2}) \bar{\psi}_L \gamma^\mu \psi_L Z_\mu$	$(\frac{g' \sin \theta_W}{6} - \frac{g_w \cos \theta_W}{2}) \bar{u}_L \gamma^\mu u_L Z_\mu$	$(-\frac{g_w}{\sqrt{2}}) \bar{u}_L \gamma^\mu d_L W_\mu^+$	$(-\frac{g_w}{\sqrt{2}}) \bar{d}_L \gamma^\mu u_L W_\mu^-$





Referencias

- [Greiner and Müller, 1994] Greiner, W. and Müller, B. (1994). *Quantum mechanics: symmetries*. Springer Science & Business Media.
- [Halzen and Martin, 2008] Halzen, F. and Martin, A. D. (2008). *Quark & Leptons: An Introductory Course In Modern Particle Physics*. John Wiley & Sons.
- [Thomson, 2013] Thomson, M. (2013). *Modern particle physics*. Cambridge University Press.