

# Parciales resueltos de Estructura de la Materia 4

6 de diciembre de 2018



**Sobre estos apuntes** Estos apuntes/resueltos fueron creados por un alumno mientras cursaba la materia. Es por ello que podrían haber errores de tipeo, errores conceptuales, de interpretación en los resultados, etc. Use estos apuntes con precaución. Estos apuntes no son oficiales de ninguna cátedra. Lea atentamente el prospecto. En caso de notar algún efecto adverso suspenda inmediatamente su uso y consulte con su profesor de cabecera.

- El alumno autor de estos apuntes cursó la materia el segundo cuatrimestre de 2018, [este link](#) conduce a la página oficial del curso.
- Encontrá más resueltos de Alf en [este link](#).

## Box 1 - ¿Cómo se hacen estos apuntes?

Estos apuntes están hechos usando un programa llamado [Lyx](#)<sup>a</sup>. Para hacer los dibujos se usó [Inkscape](#) y después se insertó las imágenes en formato [svg](#)<sup>b</sup> directamente en Lyx.

En [este repositorio de GitHub](#) se encuentra la plantilla (*template*) que Alf usa actualmente, con todo lo necesario para compilarla y empezar a divertirse.

<sup>a</sup>Lyx es una interfaz gráfica para Latex que hace que la escritura se vuelva extremadamente fluida y veloz (al punto de poderse tomar apuntes en vivo durante una clase).

<sup>b</sup>svg es el formato nativo de Inkscape.

## Índice

<b>Primeros parciales</b>	<b>3</b>
<b>Parcial del primer cuatrimestre de 2016</b>	<b>3</b>
Problema 1 . . . . .	3
Ítem a . . . . .	3
Ítem b . . . . .	4
Ítem c . . . . .	4
<b>Parcial del segundo cuatrimestre de 2017, tema 2</b>	<b>6</b>
Problema 1 . . . . .	6
Ítem a . . . . .	6
Problema 2 . . . . .	6
Ítem a . . . . .	6
Ítem b . . . . .	7
<b>Recuperatorio del segundo cuatrimestre de 2017</b>	<b>8</b>
Problema 1 . . . . .	8
Ítem a . . . . .	8
Ítem b . . . . .	10
Problema 2 . . . . .	11

Problema 3 . . . . .	11
Ítem a . . . . .	11
Ítem b . . . . .	11
Ítem c . . . . .	11
Ítem d . . . . .	12
Ítem e . . . . .	12

**Segundos parciales** **13**

**Recuperatorio del 1<sup>er</sup> cuatrimestre de 2017** **13**

Problema 1 . . . . .	13
Ítem a . . . . .	13
Ítem b . . . . .	13
Ítem c . . . . .	13
Problema 2 . . . . .	14
Ítem a . . . . .	14

**Fórmulas** **15**

**Índice de *boxes***

1. <b>Box 1 - ¿Cómo se hacen estos apuntes?</b> . . . . .	1
2. <b>Box 2 - Fórmulas matemáticas</b> . . . . .	15
3. <b>Box 3 - Fórmulas relatividad</b> . . . . .	15
4. <b>Box 4 - Fórmulas isospín y SU(3)</b> . . . . .	15
5. <b>Box 5 - Fórmulas de ecuaciones de onda relativistas</b> . . . . .	16
6. <b>Box 6 - Fórmulas de formulación lagrangiana</b> . . . . .	17
7. <b>Box 7 - Fórmulas gauge no abeliano</b> . . . . .	17
8. <b>Box 8 - Fórmulas modelo estándar</b> . . . . .	17
9. <b>Box 9 - Vértices modelo estándar</b> . . . . .	18

# Primeros parciales

## Parcial del primer cuatrimestre de 2016

### Problema 1

#### Ítem a

En el frame  $\mathcal{C}$  de la consigna se tiene que

$$\text{En frame } \mathcal{C} \rightarrow \begin{cases} (p_e^{\text{inicial}})^\mu \sim \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 13m \\ 0 \\ 12m \\ 0 \end{bmatrix} \\ (p_\gamma^{\text{inicial}})^\mu \sim \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 13k \\ 5k \\ 12k \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Lo que se está solicitando ahora es encontrar cuál es el frame  $\mathcal{A}$  tal que elimina las componentes en  $y$  de ambos cuadrimomentos. La respuesta es que existen infinitos boosts que logran esto, pero uno de ellos podría ser considerado como el privilegiado por sobre todos los demás. Este boost privilegiado es aquel tal que en el frame  $\mathcal{A}$  el electrón se encuentra en reposo. Voy a asumir que la consigna está pidiendo este boost en particular. En este caso

$$\text{En el frame } \mathcal{A} \rightarrow \begin{cases} (p_e^{\text{inicial}})^\mu \sim \begin{bmatrix} m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \text{Pues está en reposo} \\ (p_\gamma^{\text{inicial}})^\mu \sim \begin{bmatrix} [E_\gamma^{\text{inicial}}]_{\mathcal{A}} \\ [E_\gamma^{\text{inicial}}]_{\mathcal{A}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Ahora las cuentitas:

$$\begin{cases} [(p_e^{\text{inicial}})^\mu]_{\mathcal{A}} = (\Lambda_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}})^{\mu}_{\nu} [(p_e^{\text{inicial}})^\nu]_{\mathcal{C}} \\ [(p_\gamma^{\text{inicial}})^\mu]_{\mathcal{A}} = (\Lambda_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}})^{\mu}_{\nu} [(p_\gamma^{\text{inicial}})^\nu]_{\mathcal{C}} \end{cases}$$

Perdón por la notación con exceso de cosas. Es simplemente para no pasarme nada por alto. Para  $\Lambda$  propongo que

$$(\Lambda_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}})^{\mu}_{\nu} \sim \begin{bmatrix} \gamma & 0 & \beta\gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

con lo cual el sistemita anterior es

$$\begin{cases} \text{Electrón} \rightarrow \begin{cases} \mu = 0 \rightarrow m = \frac{13}{5}m\gamma + \frac{12}{5}m\beta\gamma \\ \mu = 2 \rightarrow 0 = \frac{13}{5}m\beta\gamma + \frac{12}{5}m\gamma \end{cases} \\ \text{Fotón} \rightarrow \begin{cases} \mu = 0 \rightarrow [E_\gamma^{\text{inicial}}]_{\mathcal{A}} = \frac{13}{5}k\gamma + \frac{12}{5}k\beta\gamma \\ \mu = 1 \rightarrow [E_\gamma^{\text{inicial}}]_{\mathcal{A}} = 5k \\ \mu = 2 \rightarrow 0 = \frac{13}{5}k\beta\gamma + \frac{12}{5}k\gamma \end{cases} \end{cases}$$

Las ecuaciones para el fotón son innecesarias (creo) ya que de las ecuaciones para el electrón se encuentra que

$$\beta = -\frac{12}{13}$$

y como  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$  entonces

$$(\Lambda_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}})^{\mu}_{\nu} \sim \begin{bmatrix} \frac{13}{5} & 0 & -\frac{12}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{12}{5} & 0 & \frac{13}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Los cuádrimomentos iniciales en el frame  $\mathcal{A}$  serán, como era de esperarse (ja),

$$\text{En el frame } \mathcal{A} \rightarrow \begin{cases} (p_e^{\text{inicial}})^\mu \sim \begin{bmatrix} m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ (p_\gamma^{\text{inicial}})^\mu \sim \begin{bmatrix} k \\ k \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

**Ítem b**

En este ítem TODO será evaluado en el frame  $\mathcal{A}$ . En consecuencia voy a tirar la notación del ítem previo que indicaba en qué frame se evalúan las cosas.

Por conservación de cuádrimomento debe ocurrir que

$$(p_e^{\text{inicial}})^\mu + (p_\gamma^{\text{inicial}})^\mu = (p_e^{\text{final}})^\mu + (p_\gamma^{\text{final}})^\mu \rightarrow \text{Conservación}$$

Proponiendo

$$\text{Propongo esto } \rightarrow \begin{cases} (p_e^{\text{final}})^\mu \sim \begin{bmatrix} \sqrt{p^2 + m^2} \\ p \cos \phi \\ p \sin \phi \\ 0 \end{bmatrix} \\ (p_\gamma^{\text{final}})^\mu \sim \begin{bmatrix} E \\ E \cos \theta \\ E \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

y usando las expresiones del ítem previo para los iniciales entonces

$$\text{Por conservación } \rightarrow \begin{cases} \mu = 0 \rightarrow m + k = \sqrt{p^2 + m^2} + E \\ \mu = 1 \rightarrow k = p \cos \phi + E \cos \theta \\ \mu = 2 \rightarrow 0 = p \sin \phi + E \sin \theta \end{cases}$$

Hay tres ecuaciones con tres incógnitas (que son  $p, E$  y  $\phi$  ya que  $\theta$  es la dirección de observación que es dato). Debería poderse resolver. De la ecuación  $\mu = 2$  se encuentra que

$$p = -E \frac{\sin \theta}{\sin \phi}$$

y reemplazando en  $\mu = 1$

$$\phi = \tan^{-1} \left( \frac{-k}{E} \tan \theta \right)$$

Metiendo todo en  $\mu = 0$  queda

$$m + k = \sqrt{E^2 \frac{\sin^2 \theta}{[\tan^{-1} (\frac{-k}{E} \tan \theta)]^2} + m^2} + E$$

Bueno, es imposible de despejar. Debe haber algún truco que no estoy viendo. De todos modos a partir de acá ya no hay nada de física, es sólo resolver el sistema de ecuaciones. Ya fue.

**Ítem c**

El sistema centro de masa es aquel en el que el cuádrimomento total sólo tiene componente temporal. Es decir

$$[(p_e^{\text{inicial}})^\mu + (p_\gamma^{\text{inicial}})^\mu]_{\text{CM}} \sim \begin{bmatrix} E_{\text{CM}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Centro de masa}$$

Antes de poder seguir, se debe encontrar la transformación  $\Lambda$  que lleva al centro de masa. Esto es

$$[(p_e^{\text{inicial}})^\mu + (p_\gamma^{\text{inicial}})^\mu]_{\text{CM}} = (\Lambda_{\mathcal{A} \rightarrow \text{CM}})^\mu{}_\nu [(p_e^{\text{inicial}})^\mu + (p_\gamma^{\text{inicial}})^\mu]_{\mathcal{A}}$$

o en notación matricial

$$\begin{bmatrix} E_{CM} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m+k \\ k \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

con lo cual

$$\begin{cases} E_{CM} = \gamma(m+k) + \beta\gamma k \\ 0 = \beta\gamma(m+k) + \gamma k \end{cases}$$

y entonces

$$\beta = -\frac{k}{m+k}$$

La matriz de transformación es

$$\Lambda_{\mathcal{A} \rightarrow CM} \sim \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{k^2}{(m+k)^2}}} & -\frac{k}{\sqrt{m(m+2k)}} & 0 & 0 \\ -\frac{k}{\sqrt{m(m+2k)}} & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{k^2}{(m+k)^2}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora que se conoce  $\Lambda_{\mathcal{A} \rightarrow CM}$  se pueden calcular las componentes de todos los momentos en el sistema centro de masa. Las iniciales son

$$\text{En el centro de masa} \rightarrow \begin{cases} (p_e^{\text{inicial}})^\mu \sim \begin{bmatrix} \frac{m}{\sqrt{1-\frac{k^2}{(m+k)^2}}} \\ -\frac{mk}{\sqrt{m(m+2k)}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ (p_\gamma^{\text{inicial}})^\mu \sim \begin{bmatrix} \frac{k}{\sqrt{1-\frac{k^2}{(m+k)^2}}} - \frac{k^2}{\sqrt{m(m+2k)}} \\ -\frac{k^2}{\sqrt{m(m+2k)}} + \frac{k}{\sqrt{1-\frac{k^2}{(m+k)^2}}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Uf, esto se está poniendo turbio. Ya fue...

## Parcial del segundo cuatrimestre de 2017, tema 2

### Problema 1

#### Ítem a

El hecho de que se haya observado el decaimiento  $\Delta^+ \rightarrow \pi^0 + p$  implica que

$$m_\Delta > m_\pi + m_p \rightarrow \text{Pues se observó decaimiento}$$

En el caso del proceso inverso los cuadrimentos son

$$(p_p)^\mu \sim \begin{bmatrix} m_p \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (p_\pi)^\mu \sim \begin{bmatrix} m_\pi + T \\ \sqrt{(m_\pi + T)^2 - m_\pi^2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (p_\Delta)^\mu \sim \begin{bmatrix} \sqrt{m_\Delta^2 + p^2} \\ p \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde  $T = \frac{3}{2}m_\pi$  por consigna. Si  $\exists p$  tal que esto tiene solución sabiendo que  $m_\Delta > m_\pi + m_p$  entonces entiendo que el proceso será posible. En caso contrario, no. La conservación de cuadrimento impone

$$\text{Conservación de } p^\mu \rightarrow \begin{cases} m_p + \frac{5}{2}m_\pi = \sqrt{m_\Delta^2 + p^2} \\ \frac{\sqrt{21}}{2}m_\pi = p \end{cases}$$

donde ya he reemplazado  $T = \frac{3}{2}m_\pi$  y he hecho las cuentitas. Reemplazando la expresión de  $p$  de la segunda ecuación en la primera se obtiene

$$\begin{aligned} \left(m_p + \frac{5}{2}m_\pi\right)^2 - \frac{21}{4}m_\pi^2 &= m_\Delta^2 \\ (m_p + m_\pi)^2 + 3m_p m_\pi &= \end{aligned}$$

Ahora comparo con lo que sé

$$\text{if } (m_\Delta > m_p + m_\pi) \Rightarrow (\text{El proceso es posible}) \text{ esle } \Rightarrow (\text{no es posible})$$

lo cual es

$$\begin{aligned} m_\Delta &> m_p + m_\pi \\ \sqrt{(m_p + m_\pi)^2 + 3m_p m_\pi} &= \leftarrow \text{Reemplazo lo que encontré} \end{aligned}$$

o bien

$$\cancel{(m_p + m_\pi)^2} + 3m_p m_\pi > \cancel{(m_p + m_\pi)^2}$$

por lo tanto

$$3m_p m_\pi > 0 \quad \equiv \quad \text{True}$$

y concluyo que el proceso es posible.

### Problema 2

#### Ítem a

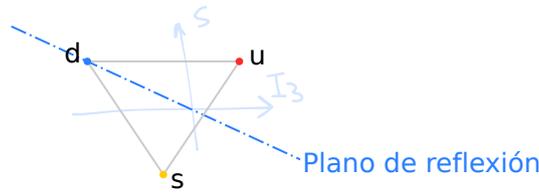
Sólo hay que hacer la cuenta. Si  $g \in \mathbf{SU}(3)$  entonces

$$g \in \mathbf{SU}(3) \iff \begin{cases} g^\dagger = g^{-1} \\ \det g = 1 \end{cases}$$

Lo de la mezcla no lo entiendo. Me voy a fijar simplemente cuál es su acción sobre los quarks. Para ello sólo hay que hacer las cuentitas y ver que da. Esto es

$$\begin{cases} \bar{g} |u\rangle = i |s\rangle \\ \bar{g} |d\rangle = |d\rangle \\ \bar{g} |s\rangle = i |u\rangle \end{cases}$$

Como se puede ver intercambia  $u$  y  $s$ , como dice la consigna y se trata de la siguiente reflexión



**Ítem b**

Antes de poder aplicar la transformación a las partículas que se solicita, debemos conocer las funciones de onda de éstas. La función de onda de un barión es, en general,

$$|\text{barión}\rangle = |\text{espín}\rangle |\text{sabor}\rangle |\text{color}\rangle$$

En cuanto a lo que es el color no vimos nada en clase más que el hecho de que

$$|\text{color}\rangle \in \text{singlete antisimétrico} \rightarrow \text{Vale siempre}$$

siempre. El motivo de esto es que en la naturaleza siempre se observan partículas incoloras. Por otro lado la parte de sabor satisface, tanto para  $\Delta^0$  como para  $\Sigma^{*0}$  (ver dibujito),

$$|\text{sabor}\rangle \in \text{decuplete simétrico}$$

por lo tanto es simétrica. Por último, sabiendo que  $|\text{barión}\rangle$  debe ser completamente antisimétrica (debido a que son fermiones) entonces la única opción que queda para la parte de espín es que sea simétrica. Y como  $2 \otimes 2 \otimes 2 = 4_S \oplus 2_{MA} \oplus 2_{MS}$  entonces necesariamente

$$|\text{espín}\rangle \in \text{cuadruplete simétrico}$$

es decir que ambas partículas poseen espín  $\frac{3}{2}$ . La parte de sabor de cada partícula es

$$\begin{aligned} |\text{sabor de } \Delta^0\rangle &= \frac{\text{Simetrización}}{\sqrt{3}} |ddu\rangle \\ &= \frac{|ddu\rangle + |dud\rangle + |udd\rangle}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} |\text{sabor de } \Sigma^{*0}\rangle &= \frac{\text{Simetrización}}{\sqrt{6}} |uds\rangle \\ &= \frac{|uds\rangle + |dus\rangle + |sdu\rangle + |sud\rangle + |usd\rangle + |dsu\rangle}{\sqrt{6}} \end{aligned}$$

Entonces las funciones de onda completas son

$$\begin{cases} |\Delta^0\rangle = \left| \text{espín} \in \left[ \frac{3}{2} \right]_S \right\rangle \frac{|ddu\rangle + |dud\rangle + |udd\rangle}{\sqrt{3}} |\text{color} \in 1_A\rangle \\ |\Sigma^{*0}\rangle = \left| \text{espín} \in \left[ \frac{3}{2} \right]_S \right\rangle \frac{|uds\rangle + |dus\rangle + |sdu\rangle + |sud\rangle + |usd\rangle + |dsu\rangle}{\sqrt{6}} |\text{color} \in 1_A\rangle \end{cases}$$

donde  $\left[ \frac{3}{2} \right]_S$  quiere decir “espín  $\frac{3}{2}$  y simétrico”.

Ahora sí se puede proceder con la aplicación del operador como pide la consigna. Para la  $\Delta^0$  esto es

$$\begin{aligned} \bar{g} |\Delta^0\rangle &= \left| \text{espín} \in \left[ \frac{3}{2} \right]_S \right\rangle \left( \frac{\bar{g} |ddu\rangle + |dud\rangle + |udd\rangle}{\sqrt{3}} \right) |\text{color} \in 1_A\rangle \\ \bar{g} \text{ actúa según ayuda de consigna} \rightarrow &= \left| \text{espín} \in \left[ \frac{3}{2} \right]_S \right\rangle \left( \frac{\bar{g} |d\rangle \bar{g} |d\rangle \bar{g} |u\rangle + \dots}{\sqrt{3}} \right) |\text{color} \in 1_A\rangle \\ &= \left| \text{espín} \in \left[ \frac{3}{2} \right]_S \right\rangle \left( \frac{i |dds\rangle + i |dsd\rangle + i |sdd\rangle}{\sqrt{3}} \right) |\text{color} \in 1_A\rangle \\ \text{Ver tablita} \rightarrow &= i |\Sigma^{*-}\rangle \end{aligned}$$

tal como era de esperarse a partir de la reflexión que ejecuta el operador  $g$  en el espacio de isospín y extrañeza. Por otro lado, la acción de  $g$  sobre  $\Sigma^{*0}$  se espera que dé la misma partícula ya que se encuentra justo sobre el eje de reflexión. La cuenta es

$$\begin{aligned} \bar{g} |\Sigma^{*0}\rangle &= \left| \text{espín} \in \left[ \frac{3}{2} \right]_S \right\rangle \bar{g} \frac{|uds\rangle + |dus\rangle + |sdu\rangle + |sud\rangle + |usd\rangle + |dsu\rangle}{\sqrt{6}} |\text{color} \in 1_A\rangle \\ &= \left| \text{espín} \in \left[ \frac{3}{2} \right]_S \right\rangle \frac{-|sdu\rangle - |dsu\rangle - |uds\rangle - |usd\rangle - |sud\rangle - |dus\rangle}{\sqrt{6}} |\text{color} \in 1_A\rangle \\ &= -|\Sigma^{*0}\rangle \end{aligned}$$

Las cargas de cada una de las partículas salen del dibujito:  $\Sigma^{*-}$  tiene  $Q = -1$  y  $\Sigma^{*0}$  tiene  $Q = 0$ .

## Recuperatorio del segundo cuatrimestre de 2017

### Problema 1

#### Ítem a

**Decaimiento de  $D$**  El cuadrimomento inicial con el mesón  $D^0$  en reposo es

$$(p_D)^\mu \sim \begin{bmatrix} m_D \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Los cuadrimomentos finales son

$$\begin{cases} (p_\pi)^\mu \sim \begin{bmatrix} \sqrt{|\mathbf{p}_\pi|^2 + m_\pi^2} \\ \mathbf{p}_\pi \end{bmatrix} \\ (p_K)^\mu \sim \begin{bmatrix} \sqrt{|\mathbf{p}_K|^2 + m_K^2} \\ \mathbf{p}_K \end{bmatrix} \end{cases}$$

La conservación del cuadrimomento impone

$$(p_D)^\mu = (p_\pi)^\mu + (p_K)^\mu \rightarrow \text{Por conservación}$$

por lo tanto

$$\text{Conservación} \rightarrow \begin{cases} m_D = \sqrt{|\mathbf{p}_\pi|^2 + m_\pi^2} + \sqrt{|\mathbf{p}_K|^2 + m_K^2} \\ \mathbf{p}_\pi = -\mathbf{p}_K \end{cases}$$

Definiendo  $\mathbf{p} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{p}_\pi = -\mathbf{p}_K$  y reemplazando en la ecuación de la componente temporal se obtiene

$$m_D = \sqrt{p^2 + m_\pi^2} + \sqrt{p^2 + m_K^2}$$

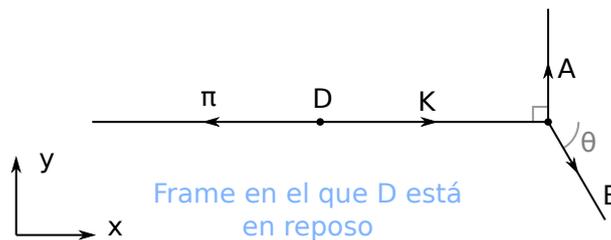
de donde se puede obtener

$$p = \frac{\sqrt{m_\pi^4 + m_K^4 + m_D^4 - 2(m_K^2 m_\pi^2 + m_D^2 m_\pi^2 + m_D^2 m_K^2)}}{2m_D}$$

Las energías de las partículas finales serán, entonces

$$\begin{cases} E_\pi = \sqrt{|\mathbf{p}_\pi|^2 + m_\pi^2} = \sqrt{p^2 + m_\pi^2} = \dots \\ E_K = \sqrt{|\mathbf{p}_K|^2 + m_K^2} = \sqrt{p^2 + m_K^2} = \dots \end{cases}$$

**Decaimiento del kaón** Voy a asumir que el deón (o lo que sea la partícula  $D$ ) está en reposo en el origen. Luego decae en  $\pi + K$  que son emitidos en la dirección  $x$  y finalmente  $K$  decae en  $A + B$  que salen en dirección como se indica en el dibujo:



El cuadrimomento del kaón es (ítem previo)

$$(p_K)^\mu \sim \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{m_\pi^4 + m_K^4 + m_D^4 - 2(m_K^2 m_\pi^2 + m_D^2 m_\pi^2 + m_D^2 m_K^2)}{4m_D^2} + m_\pi^2} \\ \frac{\sqrt{m_\pi^4 + m_K^4 + m_D^4 - 2(m_K^2 m_\pi^2 + m_D^2 m_\pi^2 + m_D^2 m_K^2)}}{2m_D} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Frame } \mathcal{D}$$

mientras que los cuadrimomentos de las partículas finales son

$$\text{En frame } \mathcal{D} \rightarrow \begin{cases} (p_A)^\mu \sim \begin{bmatrix} E_A \\ 0 \\ \sqrt{E_A^2 - m_A^2} \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{Sale en dirección } \hat{y} \\ (p_B)^\mu \sim \begin{bmatrix} E_B \\ \sqrt{E_B^2 - m_B^2} \cos \theta \\ -\sqrt{E_B^2 - m_B^2} \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

La conservación del cuadrimomento impone las siguientes tres relaciones

$$\text{Conservación} \rightarrow \begin{cases} \sqrt{\frac{m_\pi^4 + m_K^4 + m_D^4 - 2(m_K^2 m_\pi^2 + m_D^2 m_\pi^2 + m_D^2 m_K^2)}{4m_D^2}} + m_\pi^2 = E_A + E_B \\ \frac{\sqrt{m_\pi^4 + m_K^4 + m_D^4 - 2(m_K^2 m_\pi^2 + m_D^2 m_\pi^2 + m_D^2 m_K^2)}}{2m_D} = \sqrt{E_B^2 - m_B^2} \cos \theta \\ 0 = \sqrt{E_A^2 - m_A^2} - \sqrt{E_B^2 - m_B^2} \sin \theta \end{cases}$$

Aquí se tienen tres ecuaciones y tres incógnitas que son  $E_A$ ,  $E_B$  y  $\theta$ . Debería poderse resolver. No parece complicado así que lo voy a intentar. Elevando al cuadrado la segunda y la tercera ecuación se obtiene

$$\begin{cases} \frac{m_\pi^4 + m_K^4 + m_D^4 - 2(m_K^2 m_\pi^2 + m_D^2 m_\pi^2 + m_D^2 m_K^2)}{4m_D^4} = (E_B^2 - m_B^2) \cos^2 \theta \\ E_A^2 - m_A^2 = (E_B^2 - m_B^2) \sin^2 \theta \end{cases}$$

Sumando estas dos ecuaciones se anulan las funciones trigonométricas ♥ y se obtiene

$$\frac{m_\pi^4 + m_K^4 + m_D^4 - 2(m_K^2 m_\pi^2 + m_D^2 m_\pi^2 + m_D^2 m_K^2)}{4m_D^4} + E_A^2 - m_A^2 = E_B^2 - m_B^2$$

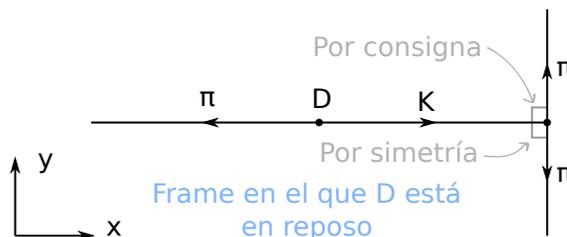
y juntando esto con la primera de las ecuaciones del sistema de conservación de momento queda algo de la siguiente forma

$$\begin{cases} E_A + E_B = \Gamma \\ E_A^2 - E_B^2 = \Xi \end{cases}$$

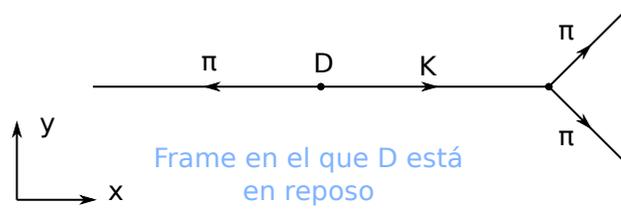
$$\text{con } \begin{cases} \Gamma = \sqrt{\frac{m_\pi^4 + m_K^4 + m_D^4 - 2(m_K^2 m_\pi^2 + m_D^2 m_\pi^2 + m_D^2 m_K^2)}{4m_D^2}} + m_\pi^2 \\ \Xi = m_A^2 - m_B^2 - \frac{m_\pi^4 + m_K^4 + m_D^4 - 2(m_K^2 m_\pi^2 + m_D^2 m_\pi^2 + m_D^2 m_K^2)}{4m_D^4} \equiv m_A^2 - m_B^2 + \Gamma^2 - m_\pi^2 \end{cases} \text{ . La solución es}$$

$$\begin{cases} E_A = \frac{\Gamma^2 + \Xi}{2\Gamma} \\ E_B = \frac{\Gamma^2 - \Xi}{2\Gamma} \end{cases}$$

En cuanto a la imposibilidad de que se dé el proceso para  $A = B = \pi$ , se ve a simple vista. Seguramente se pueden hacer las cuentas y verificar que en este caso no hay solución para  $E_A$  y  $E_B$ , pero con las expresiones que encontré es un bajón. En cambio considérese el siguiente argumento. Si las dos partículas  $A$  y  $B$  fuesen piones, entonces



Sin embargo bajo esta condición la desintegración de  $K$  no conserva el cuadrimomento en la dirección  $\hat{x}$ . En consecuencia violaría la ley de conservación con lo cual es una situación que no puede existir. Para que sí pueda existir debería ser así:



**Ítem b**

Las secciones eficaces son proporcionales a la probabilidad de un proceso con lo cual

$$\begin{cases} \sigma(K^- \rightarrow \pi^- \bar{K}^0) \propto \mathbb{P}(K^- \rightarrow \pi^- \bar{K}^0) = \left| \langle \pi^- \bar{K}^0 | \overline{U_{t_2 \leftarrow t_1}} | K^- \rangle \right|^2 \\ \sigma(K^+ \rightarrow \pi^+ K^0) \propto \mathbb{P}(K^+ \rightarrow \pi^+ K^0) = \left| \langle \pi^+ K^0 | \overline{U_{t_2 \leftarrow t_1}} | K^+ \rangle \right|^2 \end{cases}$$

donde  $\overline{U_{t_2 \leftarrow t_1}}$  es el operador de evolución temporal. Ahora se debe encontrar una base en la cual expresar las funciones de onda y hacer las cuentas. Para ello consideraré únicamente el isospín, no tengo idea qué ocurre con la parte de extrañeza (si es que influye). Entonces, en lo que respecta al isospín, recordemos que (si uno no se acuerda se puede obtener del grafiquito en la hoja número 2 de la consigna del parcial)

$$\text{Isospín en notación } |I, I_3\rangle \rightarrow \begin{cases} |\pi^+\rangle = |1, 1\rangle \\ |\pi^-\rangle = |1, -1\rangle \\ |K^+\rangle = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \\ |K^-\rangle = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\ |K^0\rangle = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\ |\bar{K}^0\rangle = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \end{cases}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} |\pi^- \bar{K}^0\rangle &= |\pi^-\rangle \otimes |\bar{K}^0\rangle \\ &= |1, -1\rangle \otimes \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \\ \text{Clebsch-Gordan} \rightarrow &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} |\pi^+ K^0\rangle &= |\pi^+\rangle \otimes |K^0\rangle \\ &= |1, 1\rangle \otimes \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\ \text{Clebsch-Gordan} \rightarrow &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \end{aligned}$$

Asumiendo ahora que únicamente actúa la interacción fuerte y recordando que ésta conserva el isospín entonces

$$\text{Se conserva el isospín} \rightarrow \begin{cases} \left| \langle \pi^- \bar{K}^0 | \overline{U_{t_2 \leftarrow t_1}} | K^- \rangle \right|^2 = \left| \langle \pi^- \bar{K}^0 | K^- \rangle \right|^2 \\ \left| \langle \pi^+ K^0 | \overline{U_{t_2 \leftarrow t_1}} | K^+ \rangle \right|^2 = \left| \langle \pi^+ K^0 | K^+ \rangle \right|^2 \end{cases}$$

Finalmente

$$\begin{aligned} \left| \langle \pi^- \bar{K}^0 | K^- \rangle \right|^2 &= \left| \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \left\langle \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right| - \sqrt{\frac{2}{3}} \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right| \right) \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \right|^2 \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} |\langle \pi^+ K^0 | K^+ \rangle|^2 &= \left| \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \left\langle \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right| + \sqrt{\frac{2}{3}} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right| \right) \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \right|^2 \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

lo cual quiere decir que el cociente de secciones eficaces da 1.

### Problema 2

Es prácticamente igual al problema 14 de la guía 4 que ya resolví.

### Problema 3

#### Ítem a

La ecuación de Dirac en la base quirral es

$$\begin{aligned} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi &= \left( i \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{bmatrix} \partial_0 + i \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{bmatrix} \cdot \nabla - m \right) \begin{bmatrix} \xi \\ \chi \end{bmatrix} \\ &= \begin{cases} \frac{\partial \chi}{\partial t} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \chi = -im\xi \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \xi = -im\chi \end{cases} \end{aligned}$$

Para  $m = 0$  se desacoplan como se puede ver.

#### Ítem b

Proponiendo la solución

$$\Psi = e^{-i(\omega t - kz)} \begin{bmatrix} \xi_0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi(t, \mathbf{x}) \\ \chi(t, \mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

se tiene que la ecuación para  $\chi$  es trivialmente  $0 \equiv 0$  y la ecuación para  $\xi$  es

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial t} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \xi &= 0 \\ -i\omega e^{-i(\omega t - kz)} \xi_0 - \sigma_3 i k e^{-i(\omega t - kz)} \xi_0 &= \\ -i(\omega \mathbb{1} + \sigma_3 k) \xi_0 e^{-i(\omega t - kz)} &= \end{aligned}$$

y entonces

$$\left( \omega \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} - k \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix} \right) \xi_0 = 0$$

lo cual [esh imposible](#) a menos que

$$\begin{cases} \xi_0 \propto \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \omega = k \\ \xi_0 \propto \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \omega = -k \\ \xi = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \nexists \text{ solución} \end{cases}$$

#### Ítem c

No termino de entender lo que piden... Encontré que

$$\omega(\xi_0) = \begin{cases} k & \text{para } \xi_0 \propto \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ -k & \text{para } \xi_0 \propto \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \emptyset & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Quizá lo que piden es encontrar la famosa solución de energía positiva. Para ello considero que la energía se obtiene mediante la aplicación del operador hamiltoniano

$$\mathcal{H}\Psi = E\Psi$$

con  $\mathcal{H} = i\frac{\partial}{\partial t}$  con lo cual

$$E = \begin{cases} k & \text{para } \xi_0 \propto \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ -k & \text{para } \xi_0 \propto \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

y entonces la solución de energía positiva es

$$\Psi \propto e^{-ik(t-z)} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Solución de energía positiva}$$

El único grado de libertad que hay está en el valor de  $k$  (y en la amplitud de  $\Psi$ ?).

### Ítem d

El operador de helicidad es

$$h = \Sigma \cdot \hat{\mathbf{k}} \rightarrow \text{Helicidad}$$

con  $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{bmatrix}$ . Si  $\Psi$  es una solución con helicidad bien definida (asumo que sí pues sino la pregunta no tiene sentido a mi entender) entonces debería poder encontrar la helicidad aplicándole el operador y viendo qué me queda. Esto es

$$\begin{aligned} h\Psi &= (\Sigma \cdot \hat{\mathbf{k}}) \Psi \\ \text{Black magic} \rightarrow &= \begin{bmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{bmatrix} e^{-ik(t-z)} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \sigma^3 = \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix} \rightarrow &= e^{-ik(t-z)} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \Psi \end{aligned}$$

Debido a que  $h\Psi = +\Psi$  concluyo que la solución encontrada tiene quiralidad positiva.

### Ítem e

El operador de quiralidad es justamente  $\gamma^5$ . Entonces la quiralidad de  $\Psi$ , si está bien definida, debería obtenerse del mismo modo que la helicidad:

$$\begin{aligned} \gamma^5\Psi &= \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} e^{-ik(t-z)} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= -\Psi \end{aligned}$$

Esto me hace concluir que la quiralidad de  $\Psi$  es negativa.

Con respecto a si es o no es lo que esperaba, no lo sé...

# Segundos parciales

## Recuperatorio del 1<sup>er</sup> cuatrimestre de 2017

Parte de este examen se encuentra oficialmente resuelta. Ver en [este link](#).

### Problema 1

#### Ítem a

Es un asco ese lagrangiano, las simetrías que veo son muy rebuscadas. Escribiendo a los campos como un multiplete  $\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \phi \end{bmatrix}$

la simetría más general es de la forma

$$\begin{bmatrix} e^{i\alpha} & & \\ & e^{i\beta} & \\ & & e^{i\gamma} \end{bmatrix}$$

sujeta a la restricción de que

$$\alpha - \beta - \gamma = 0,$$

es decir una transformación de la forma

$$\begin{bmatrix} e^{i\beta+i\gamma} & & \\ & e^{i\beta} & \\ & & e^{i\gamma} \end{bmatrix} \rightarrow \text{Simetría más general}$$

El número de parámetros de esta simetría es 2.

**Cuando  $\phi \in \mathbb{R}$**  Si  $\phi \in \mathbb{R}$  entonces la transformación de  $\phi$  no puede convertirlo en un campo complejo. Es decir, es necesario que  $\gamma = n\pi$  con  $\pi \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Supongo que lo más lindo es decir que  $\gamma = 0$  y entonces nos queda

$$\begin{bmatrix} e^{i\beta} & & \\ & e^{i\beta} & \\ & & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Para cuando } \phi \in \mathbb{R}$$

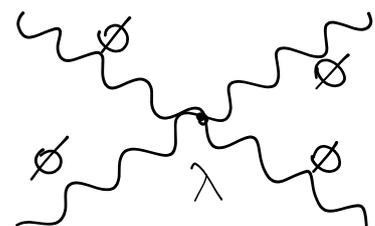
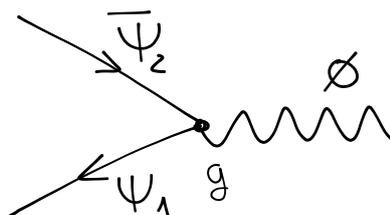
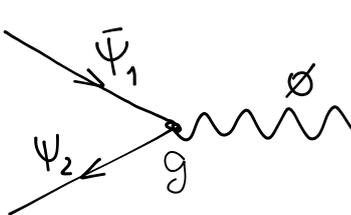
**Relación de cargas** Al gaugear la simetría previa manteniendo  $\phi \in \mathbb{R}$  se obtendría que los campos  $\psi_1$  y  $\psi_2$  deben tener la misma carga ya que una transformación de la forma  $\begin{bmatrix} e^{iq_1\alpha} & & \\ & e^{iq_2\alpha} & \\ & & 1 \end{bmatrix}$  es simetría de los términos cruzados (e.g.  $\bar{\psi}_1\phi\psi_2$ ) únicamente si  $q_1 = q_2$ .

#### Ítem b

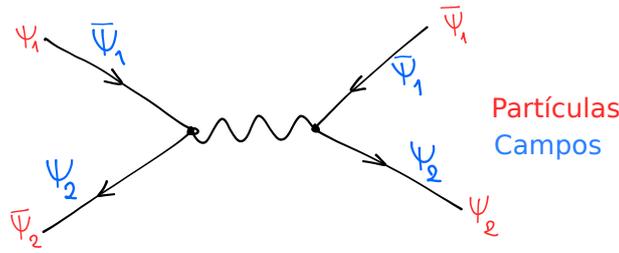
Las ecuaciones de movimiento (clásicas) para los campos se obtienen aplicando Euler-Lagrange  $\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} = 0$  donde  $\phi_i \in \{\psi_1, \psi_2, \phi, \bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \phi^*\}$ . Es sólo hacer un par de cuentas estando atento... Además, como  $\mathcal{L}$  es invariante ante la conjugación de los campos, entonces no hace falta calcular las ecuaciones para los campos conjugados.

#### Ítem c

Los vértices de este lagrangiano son



El proceso a orden más bajo en  $g$  es



y como tiene dos vértices es de orden  $g^2$ .

## Problema 2

### Ítem a

Los términos que contienen el doblete  $\Phi$  son los que están con las derivadas covariantes y el del potencial. Para el término del potencial es trivial ver que es invariante frente a  $\Phi \rightarrow e^{ig\Lambda}\Phi$ . En cuanto a los términos en las derivadas covariantes se tiene que

$$\begin{aligned} (D^\mu \Phi)^\dagger D_\mu \Phi &= ((\partial_\mu - ig(W^3_\mu J_3 + W^\pm_\mu J_\pm)) \Phi)^\dagger (\partial^\mu - ig(W^{3\mu} J_3 + W^{\pm\mu} J_\pm)) \Phi \\ &= \partial_\mu \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi - ig \partial_\mu \Phi^\dagger (W^{3\mu} J_3 + W^\pm_\mu J_\pm) \Phi + ig \Phi^\dagger (W^{3\mu} J_3 + W^\pm_\mu J_\pm)^\dagger \partial^\mu \Phi + \dots \\ &\quad \dots + g^2 \Phi^\dagger (W^3_\mu J_3 + W^\pm_\mu J_\pm)^\dagger (W^{3\mu} J_3 + W^{\pm\mu} J_\pm) \Phi. \end{aligned}$$

El término cinético de  $\Phi$  transforma según

$$\begin{aligned} (\partial_\mu \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi)' &= (\partial_\mu \Phi')^\dagger \partial^\mu \Phi' \\ &= [\partial_\mu (e^{ig\Lambda} \Phi)]^\dagger \partial^\mu (e^{ig\Lambda} \Phi) \\ &= [-ig \Phi^\dagger (\partial_\mu \Lambda) e^{-ig\Lambda} + (\partial_\mu \Phi^\dagger) e^{-ig\Lambda}] [ig e^{ig\Lambda} (\partial^\mu \Lambda) \Phi + e^{ig\Lambda} (\partial^\mu \Phi)] \\ &= g^2 \Phi^\dagger (\partial_\mu \Lambda) e^{-ig\Lambda} e^{ig\Lambda} (\partial^\mu \Lambda) \Phi - ig \Phi^\dagger (\partial_\mu \Lambda) e^{-ig\Lambda} e^{ig\Lambda} (\partial^\mu \Phi) + \dots \\ &\quad \dots + ig (\partial_\mu \Phi^\dagger) e^{-ig\Lambda} e^{ig\Lambda} (\partial^\mu \Lambda) \Phi + (\partial_\mu \Phi^\dagger) e^{-ig\Lambda} e^{ig\Lambda} (\partial^\mu \Phi) \\ &= \partial_\mu \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi + g^2 \Phi^\dagger \partial_\mu \Lambda \partial^\mu \Lambda \Phi. \end{aligned}$$

## Fórmulas

### Box 2 - Fórmulas matemáticas

$$(e^A)^\dagger = e^{A^\dagger} \quad \det e^A = e^{\text{Tr}A} \quad \frac{d}{dx} e^{xA} = A e^{xA} \quad e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\dots} \quad (e^A)^{-1} = e^{-A}$$

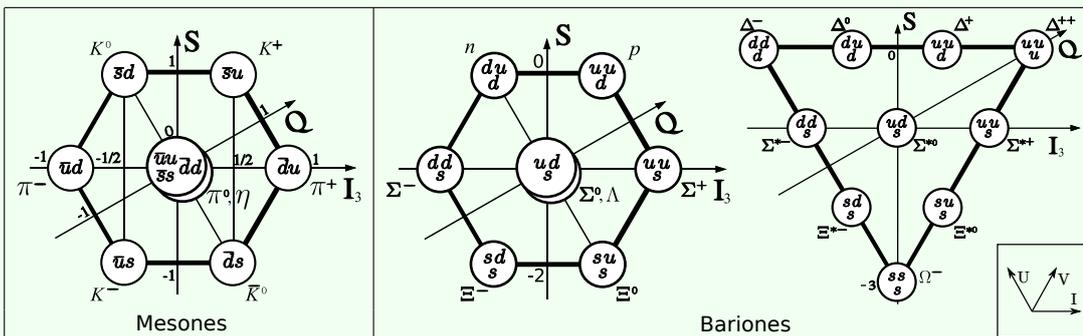
$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$$

### Box 3 - Fórmulas relatividad

$$p^\mu \sim \begin{bmatrix} E/c \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = m\gamma \begin{bmatrix} c \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} \sim \underbrace{\begin{bmatrix} i\partial^0 \\ -i\nabla \end{bmatrix}}_{\text{En cuántica}} \quad \frac{E^2}{c^2} = \mathbf{p}^2 + m^2 c^2 \quad \begin{cases} \beta = \frac{v}{c} \\ \gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_\mu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \\ \partial^\mu \stackrel{\text{def}}{=} \eta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \sim \begin{bmatrix} \partial_t \\ -\nabla \end{bmatrix} \end{cases} \quad \square^2 = \partial^\mu \partial_\mu \quad x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu \quad \begin{cases} x^\mu \sim \begin{bmatrix} t \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} & \text{Contravariante} \\ x_\mu \sim \begin{bmatrix} t \\ -\mathbf{x} \end{bmatrix} & \text{Covariante} \end{cases}$$

### Box 4 - Fórmulas isospín y SU(3)



$$\left[ \frac{1}{2} \right] \otimes \left[ \frac{1}{2} \right] \otimes \left[ \frac{1}{2} \right] = \left[ \frac{3}{2} \right]_S \oplus \left[ \frac{1}{2} \right]_{MA} \oplus \left[ \frac{1}{2} \right]_{MS}$$

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 10_S \oplus 8_{MA} \oplus 8_{MS} \oplus 1_A$$

$$\begin{aligned} \left[ \overline{\Lambda}_i, \overline{\Lambda}_j \right] &= i f_{ijk} \overline{\Lambda}_k \\ \overline{\Lambda}_i &\sim \begin{cases} \lambda_i & \text{En quarks} \\ \bar{\lambda}_i = -\lambda_i^* & \text{En antiquarks} \end{cases} \end{aligned} \quad \begin{cases} f_{123} = 1 \\ f_{147} = -f_{156} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = -f_{367} = \frac{1}{2} \\ f_{458} = f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ f_{ijk} = -f_{jik} = -f_{ikj} \text{ etc.} \end{cases} \quad \begin{cases} \overline{V}_\pm = \frac{\overline{\Lambda}_1 \pm i \overline{\Lambda}_2}{2} \\ \overline{U}_\pm = \frac{\overline{\Lambda}_6 \pm i \overline{\Lambda}_7}{2} \\ \overline{V}_\pm = \frac{\overline{\Lambda}_4 \pm i \overline{\Lambda}_5}{2} \end{cases}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{Quarks} \rightarrow \begin{cases} \overline{I}_+ \begin{pmatrix} |u\rangle \\ |d\rangle \\ |s\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ |u\rangle \\ 0 \end{pmatrix} & \overline{U}_+ \begin{pmatrix} |u\rangle \\ |d\rangle \\ |s\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ |d\rangle \end{pmatrix} & \overline{V}_+ \begin{pmatrix} |u\rangle \\ |d\rangle \\ |s\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ |u\rangle \end{pmatrix} \\
 \overline{I}_- \begin{pmatrix} |u\rangle \\ |d\rangle \\ |s\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |d\rangle \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \overline{U}_- \begin{pmatrix} |u\rangle \\ |d\rangle \\ |s\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ |s\rangle \\ 0 \end{pmatrix} & \overline{V}_- \begin{pmatrix} |u\rangle \\ |d\rangle \\ |s\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |s\rangle \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases} \\
 \text{Antiquarks} \rightarrow \begin{cases} \overline{I}_+ \begin{pmatrix} |\bar{u}\rangle \\ |\bar{d}\rangle \\ |\bar{s}\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -|\bar{d}\rangle \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \overline{U}_+ \begin{pmatrix} |\bar{u}\rangle \\ |\bar{d}\rangle \\ |\bar{s}\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -|\bar{s}\rangle \\ 0 \end{pmatrix} & \overline{V}_+ \begin{pmatrix} |\bar{u}\rangle \\ |\bar{d}\rangle \\ |\bar{s}\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -|\bar{s}\rangle \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \overline{I}_- \begin{pmatrix} |\bar{u}\rangle \\ |\bar{d}\rangle \\ |\bar{s}\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -|\bar{u}\rangle \\ 0 \end{pmatrix} & \overline{U}_- \begin{pmatrix} |\bar{u}\rangle \\ |\bar{d}\rangle \\ |\bar{s}\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -|\bar{d}\rangle \end{pmatrix} & \overline{V}_- \begin{pmatrix} |\bar{u}\rangle \\ |\bar{d}\rangle \\ |\bar{s}\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -|\bar{u}\rangle \end{pmatrix} \end{cases}
 \end{array}$$

Box 5 - Fórmulas de ecuaciones de onda relativistas

Klein-Gordon

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \phi = 0$$

Dirac

$$\begin{cases} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0 \\ \bar{\psi} \left( \overleftarrow{\partial}_\mu \gamma^\mu + m \right) = 0 \end{cases} \quad \bar{\psi} \stackrel{\text{def}}{=} \psi^\dagger \gamma^0 \quad \mathcal{H}_{\text{Dirac libre}} = \gamma^0 m + \gamma^0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \underline{\mathbf{p}} \quad J^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad \partial_\mu J^\mu = 0$$

$$\text{Soluciones base Dirac} \rightarrow \begin{cases} u_i = e^{-ikx} \begin{bmatrix} \xi_i \\ \frac{\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{k^0 + m} \xi_i \end{bmatrix} & E > 0 \\ v_i = e^{ikx} \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{k^0 + m} \xi_i \\ \xi_i \end{bmatrix} & E < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \xi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \xi_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases} \quad \text{Espín} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{S} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma} \\ \boldsymbol{\Sigma} \sim \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{bmatrix} \end{cases}$$

$\left\{ \begin{array}{l} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \mathbf{1} \leftarrow \text{Clifford} \\ (\gamma^\mu)^2 = \mathbf{1} \eta^{\mu\mu} \\ (\gamma^\mu)^\dagger = \begin{cases} -\gamma^\mu & \text{para } \mu \neq 0 \\ \gamma^\mu & \text{para } \mu = 0 \end{cases} \\ (\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \\ \gamma^5 \stackrel{\text{def}}{=} i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \quad (\gamma^5)^2 = \mathbf{1} \\ \{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0 \end{array} \right.$	<p style="text-align: center; margin: 0;">Base de Dirac</p> $\gamma^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \\ & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \quad \gamma^i = \begin{bmatrix} & \sigma_i \\ -\sigma_i & \end{bmatrix}$	<p style="text-align: center; margin: 0;">Base de Weyl</p> $\gamma^0 = \begin{bmatrix} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \end{bmatrix} \quad \gamma^i = \begin{bmatrix} & \sigma_i \\ -\sigma_i & \end{bmatrix}$
	$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} [\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk} \sigma_k \\ \{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij} \mathbf{1} \end{array} \right.$	

$$S_\Lambda^{-1} \gamma^\mu S_\Lambda = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu \quad \left\{ \begin{array}{l} [\Psi']_{x'} = S_\Lambda [\Psi]_{x(x')} \\ [\bar{\Psi}']_{x'} = [\bar{\Psi}]_{x(x')} S_\Lambda^{-1} \end{array} \right. \quad S_\Lambda = \exp\left(-\frac{i}{2} \omega_{\alpha\beta} \Sigma^{\alpha\beta}\right) \quad \Sigma^{\alpha\beta} = \frac{i}{4} [\gamma^\alpha, \gamma^\beta] \quad \omega_{\alpha\beta} \sim \begin{bmatrix} 0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ -\xi_1 & 0 & \theta_3 & \theta_2 \\ -\xi_2 & -\theta_3 & 0 & \theta_1 \\ -\xi_3 & -\theta_2 & -\theta_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Parity operator} \rightarrow \begin{cases} \mathcal{P}\psi \stackrel{\text{def}}{=} \gamma^0 \psi(t, -\mathbf{x}) \\ \mathcal{P}\bar{\psi} = \overline{\psi(t, -\mathbf{x})} \gamma^0 \end{cases} \quad \gamma^5 = i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \rightarrow \text{Quiralidad} \quad P_\pm = \frac{\mathbf{1} \pm \gamma^5}{2} \quad h = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \rightarrow \text{Helicidad}$$

**Box 6 - Fórmulas de formulación lagrangiana**

$$\text{Noether} \rightarrow \begin{cases} \varepsilon J^\mu = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \delta \phi_i(\varepsilon) + F(\varepsilon)^\mu \\ \delta \mathcal{L} = \partial_\mu F^\mu \quad \varepsilon \rightarrow 0 \text{ es el parámetro} \end{cases} \quad \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \quad \begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Dirac}} &= \bar{\Psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi \\ \mathcal{L}_{\text{KG}} &= \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi \end{aligned}$$

**Box 7 - Fórmulas gauge no abeliano**

$$\begin{aligned} D_\mu &\stackrel{\text{def}}{=} \partial_\mu + igA_\mu & \Omega &\stackrel{\text{def}}{=} \exp(-ig\alpha^a(x)T_a) & D'_\mu &= \Omega D_\mu \Omega^{-1} & A_\mu &\equiv A^a_\mu T_a & A'^a_\mu &= A^a_\mu - \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha^a \\ T_a^\dagger &= T_a & [T_a, T_b] &= if_{abc} T^c & f_{abc} & \text{totalmente antisimétrico para } \mathfrak{su}(N) \\ A'_\mu &= \Omega A_\mu \Omega^{-1} - \frac{1}{ig} (\partial_\mu \Omega) \Omega^{-1} \Rightarrow (A^a_\mu)' &= A^a_\mu + \partial_\mu \alpha^a + g\alpha^b A^c_\mu f^a_{bc} \\ G_{\mu\nu} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{ig} [D_\mu, D_\nu] \equiv F_{\mu\nu} + ig[A_\mu, A_\nu] = G^a_{\mu\nu} T_a = \mathbf{G}_{\mu\nu} \cdot \mathbf{T} \\ G^a_{\mu\nu} &= \partial_\mu G^a_\nu - \partial_\nu G^a_\mu - gf^a_{bc} G^b_\mu G^c_\nu & (G^a_\mu)' &= G^a_\mu - \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha^a - f^a_{bc} \alpha_b G_{c\mu} & (G_{\mu\nu})' &= \Omega G_{\mu\nu} \Omega^{-1} \\ \mathcal{L}_{\text{YM}} &= (D^\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi) - m^2 \Phi^\dagger \Phi - \frac{1}{2} \text{Tr}(G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}) \end{aligned}$$

**Box 8 - Fórmulas modelo estándar**

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{\text{QCD}} = \sum_{q \in \text{quarks}} (\bar{q} i\gamma^\mu D_S q) - \frac{1}{4} G^a_{\mu\nu} G^{a\mu\nu} \\ \mathcal{L}_{\text{EW}} = \sum_{\Psi \in \text{dobletes E.W.}} \left( \bar{\Psi}_L i\gamma^\mu D_L^{(\Psi)} \Psi_L + \bar{\Psi}_R i\gamma^\mu D_R^{(\Psi)} \Psi_R \right) - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - \frac{1}{4} W^a_{\mu\nu} W^{a\mu\nu} \\ \mathcal{L}_{\text{Higgs}} = (D_h \Phi)^\dagger (D_h \Phi) - \lambda \left( \Phi^\dagger \Phi - \frac{v^2}{2} \right)^2 + \bar{\Psi}_L \Phi \psi_R + \bar{\psi}_R \Phi^\dagger \Psi_L + \mathcal{L}_{\text{Higgs} \cup \text{quarks}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{quarks} = \{u, d, c, s, t, b\} & u \equiv \begin{bmatrix} u_{\text{red}} \\ u_{\text{green}} \\ u_{\text{blue}} \end{bmatrix}, d = \dots \\ \text{dobletes E.W.} = \left\{ \begin{bmatrix} \nu_e \\ e \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u \\ d' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ s' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} t \\ b' \end{bmatrix} \right\} & \begin{bmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & a & b \\ i & b & b \\ \ominus & o & \ominus \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ s \\ b \end{bmatrix} \\ \Phi = \begin{bmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2, \Phi \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{h+v}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\text{Gauge fields} \rightarrow \begin{cases} B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu & \rightarrow B \text{ field } \exists! \\ W^a_{\mu\nu} \sim \mathbf{W}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{W}_\nu - \partial_\nu \mathbf{W}_\mu - g \mathbf{W}_\mu \times \mathbf{W}_\nu & \rightarrow \text{Weakons } a \in \{1, 2, 3\} \\ G^a_{\mu\nu} = \partial_\mu G^a_\nu - \partial_\nu G^a_\mu - gf^a_{bc} G^b_\mu G^c_\nu & \rightarrow \text{Gluons } a \in \{1, \dots, 8\} \end{cases}$$

Strong gauge:  $D_{S\mu} = \partial_\mu + i\frac{g_s}{2}G^a_\mu T_a$   $[T_a, T_b] = if_{abc}T^c \Rightarrow T_{\text{strong}} = \lambda, T_{\text{weak}} = \sigma$

Electroweak gauge:  $\begin{cases} D_L^{(\Psi)} = \partial_\mu + i\frac{g'}{2}Y_L^{(\Psi)}B_\mu + i\frac{g_w}{2}T_a W^a_\mu & \rightarrow \text{Left components} \\ D_R^{(\Psi)} = \partial_\mu + i\frac{g'}{2}Y_R^{(\Psi)}B_\mu & \rightarrow \text{Right components} \end{cases}$

Higgs gauge:  $D_{h\mu} = \partial_\mu + i\frac{g'}{2}Y_h B_\mu + i\frac{g_w}{2}T_a W^a_\mu$

Hypercharge  $\rightarrow$   $\begin{cases} Y_L^{(\Psi)} = \begin{bmatrix} y_{L1}^{(\Psi)} \\ y_{L2}^{(\Psi)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \\ Y_R^{(\Psi)} = \begin{bmatrix} y_{R1}^{(\Psi)} \\ y_{R2}^{(\Psi)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$   $Y_L^{(\text{leptones})} = \begin{bmatrix} -1 & \\ & -1 \end{bmatrix}$   $Y_R^{(\text{leptones})} = \begin{bmatrix} 0 & \\ & -2 \end{bmatrix}$   
 $Y_L^{(\text{quarks})} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \\ & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$   $Y_R^{(\text{quarks})} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \\ & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$   
 $Y_h = \mathbb{1}$

$$\begin{bmatrix} B_\mu \\ W^3_\mu \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \theta_W & -\sin \theta_W \\ \sin \theta_W & \cos \theta_W \end{bmatrix}}_{M^{-1}=M^T} \begin{bmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} W^1_\mu \\ W^2_\mu \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W^+_\mu \\ W^-_\mu \end{bmatrix} \quad \begin{cases} \Psi_L = P_L \Psi \\ \Psi_R = P_R \Psi \end{cases} \quad \begin{cases} P_L = \frac{\mathbb{1} - \gamma^5}{2} \\ P_R = \frac{\mathbb{1} + \gamma^5}{2} \end{cases}$$

$g' \cos \theta_W = g_w \sin \theta_W = e$

Box 9 - Vértices modelo estándar

$\bar{\Psi}_L i \gamma^\mu D_L^{(\Psi)} \Psi_L + \bar{\Psi}_R i \gamma^\mu D_R^{(\Psi)} \Psi_R$ para leptones			$\bar{\Psi}_L i \gamma^\mu D_L^{(\Psi)} \Psi_L + \bar{\Psi}_R i \gamma^\mu D_R^{(\Psi)} \Psi_R$ para quarks		
$e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu$	$(-\frac{g_w}{\sqrt{2}}) \bar{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L W^+_\mu$	$(-\frac{g_w}{\sqrt{2}}) \bar{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L W^-_\mu$	$(-\frac{2}{3}e) \bar{u} \gamma^\mu u A_\mu / (\frac{2}{3}e) \bar{d} \gamma^\mu d A_\mu$	$(\frac{2g' \sin \theta_W}{3}) \bar{u}_R \gamma^\mu u_R Z_\mu / (-\frac{2g' \sin \theta_W}{3}) \bar{d}_R \gamma^\mu d_R Z_\mu$	$(\frac{g' \sin \theta_W}{6} + \frac{g_w \cos \theta_W}{2}) \bar{d}_L \gamma^\mu d_L Z_\mu$
$(-\frac{g' \sin \theta_W}{2} - \frac{g_w \cos \theta_W}{2}) \bar{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L Z_\mu$	$(-g' \sin \theta_W) \bar{\nu}_R \gamma^\mu \nu_R Z_\mu$	$(-\frac{g' \sin \theta_W}{2} + \frac{g_w \cos \theta_W}{2}) \bar{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L Z_\mu$	$(\frac{g' \sin \theta_W}{6} - \frac{g_w \cos \theta_W}{2}) \bar{u}_L \gamma^\mu u_L Z_\mu$	$(-\frac{g_w}{\sqrt{2}}) \bar{u}_L \gamma^\mu d_L W^+_\mu$	$(-\frac{g_w}{\sqrt{2}}) \bar{d}_L \gamma^\mu u_L W^-_\mu$

